Examen de Ecuaciones, Sistemas y Complejos

1) Simplifica al máximo el apartado a) y racionaliza el apartado b) **(1 punto)**

a) $\left(\dfrac{\sqrt{27}\cdot 9^{\frac{2}{3}}\cdot 3^{-2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{27}}\right)^{-1} = \left(\dfrac{3^{\frac{3}{2}}\cdot 3^{\frac{4}{3}}\cdot 3^{-2}}{3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{3}{4}}}\right)^{-1} = \left(3^{-\frac{5}{12}}\right)^{-1} = 3^{\frac{5}{12}}$

b) $\dfrac{\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{\sqrt{2}-3\sqrt{3}} = \dfrac{\left(\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right)^2}{\left(\sqrt{2}-3\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right)} = \dfrac{2+6\sqrt{6}+27}{2-27} = -\dfrac{29+6\sqrt{6}}{25}$

2) Desarrolla por el Binomio de Newton $\left(\sqrt{3}-3\right)^3$ **(1 punto)**

$$\left(\sqrt{3}-3\right)^3 = 1\left(\sqrt{3}\right)^3 - 3\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2\cdot 3 + 3\sqrt{3}\cdot 9 - 27 = -54+30\sqrt{3}$$

3) Resolver la siguiente inecuación : $|x+1| \le 5$ **(1 punto)**

-5≤(x+1)≤5:

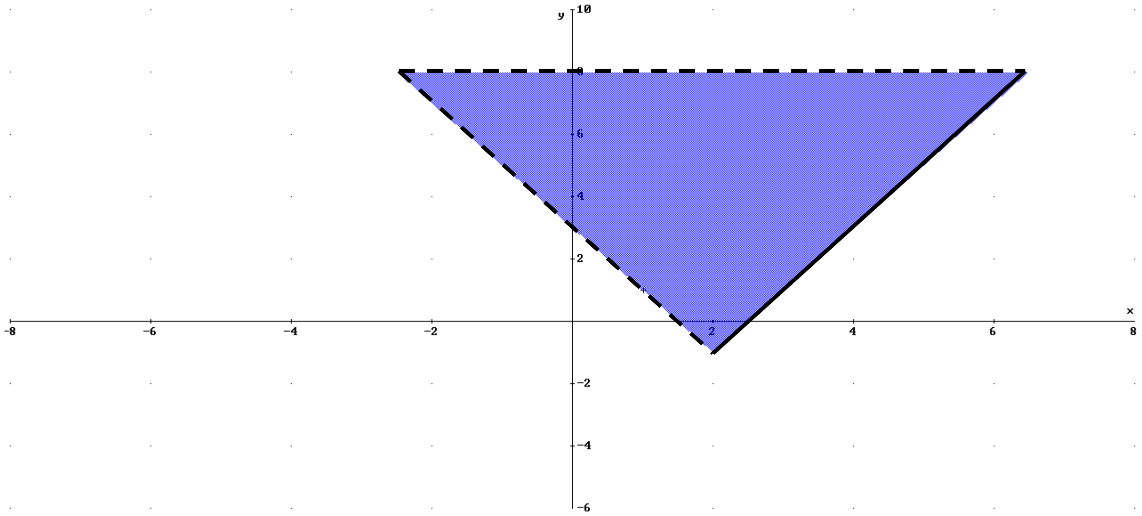
(1) x+1≤5 → x≤4

(2) x+1≥-5 → x≥-6

4≥x≥-6 → Solución=[-6,4]

4) Representa las soluciones del siguiente sistema de inecuaciones **(1 punto)**

$$\begin{cases} 2x-y-5\le 0 \\ 4x+2y-6>0 \\ y<8 \end{cases}$$



5) Resuelve **(1.5 puntos)**

a) $\begin{cases} \log_2(x-4) - 2\log_2(y) = -3 \\ x + y = 10 \end{cases}$

$$\log_2\left(\frac{x-4}{y^2}\right) = -3 \rightarrow \frac{x-4}{y^2} = 2^{-3} \rightarrow 8(x-4) = y^2$$

$\begin{cases} 8(x-4) = y^2 \\ x + y = 10 \end{cases}$ → **x=6, y=4** ; x=22, y=-12

La pareja x=22, y=-12 no válida pues no existe $\log_2(-12)$

b) $2 \cdot \log_5(x-2) - \log_5(x-22) = 3$

$$\log_5\left(\frac{(x-2)^2}{x-22}\right) = 3 \rightarrow \frac{(x-2)^2}{x-22} = 5^3 \rightarrow x^2 - 4x + 4 = 125x - 2750 \rightarrow x^2 - 129x + 2754 = 0$$

x=102, x=27. Las dos son soluciones.

6) Resolver mediante Gauss el siguiente sistema, clasificándolo según el número de soluciones **(1 punto)**

$$\left.\begin{aligned} 2x + y + 2z &= 7 \\ x + 2y - z &= 1 \\ -3x + 2y + z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Resolviendo por Gauss → x=1, y=1, z=2. Sistema compatible determinado

7) Opera y simplifica los siguientes complejos: **(1 punto)**

a) $\dfrac{-2+i}{3-5i} - i = \dfrac{(-2+i)(3+5i)}{(3-5i)\cdot(3+5i)} - i = \dfrac{-6-10i+3i-5}{34} - i = \dfrac{-7}{34}i - \dfrac{11}{34} - i = -\dfrac{11}{34} - \dfrac{41}{34}i$

b) $\sqrt[4]{4-3i} = \sqrt[4]{5_{323,1}} = \begin{cases} \sqrt[4]{5}_{80,8} \\ \sqrt[4]{5}_{170,8} \\ \sqrt[4]{5}_{260,8} \\ \sqrt[4]{5}_{350,8} \end{cases}$

8) Resuelve la siguiente ecuación: z^2-4z+2+i=0 **(1 punto)**

$$z=\frac{4+\sqrt{16-4(2+i)}}{2}=\frac{4+\sqrt{8-4i}}{2}=2+\sqrt{2-i}=2+\sqrt{\sqrt{5}_{333,4}}=\begin{cases}2+\sqrt[4]{5}_{166,7}\\2+\sqrt[4]{5}_{346,7}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2+\sqrt[4]{5}_{166,7}=0{,}54+0{,}34i\\2+\sqrt[4]{5}_{346,7}=3{,}46-0{,}34i\end{cases}$$

9) Encontrar el complejo z que cumple que su cuadrado es igual a su raíz **(1.5 ptos)**

Llamamos $z=r_\alpha$

$$\begin{matrix}z^2=r^2{}_{2\alpha}\\\sqrt{z}=\sqrt{r}_{\alpha/2}\end{matrix}\rightarrow$$

$$r^2=\sqrt{r}\rightarrow r=0,\ r=1\qquad 2\alpha=\frac{\alpha}{2}+360k\rightarrow\frac{3}{2}\alpha=360k\rightarrow\alpha=240k=\begin{cases}0\\240\\120\end{cases}$$

Soluciones → z=0, z=1, $z=1_{240}$, $z=1_{120º}$