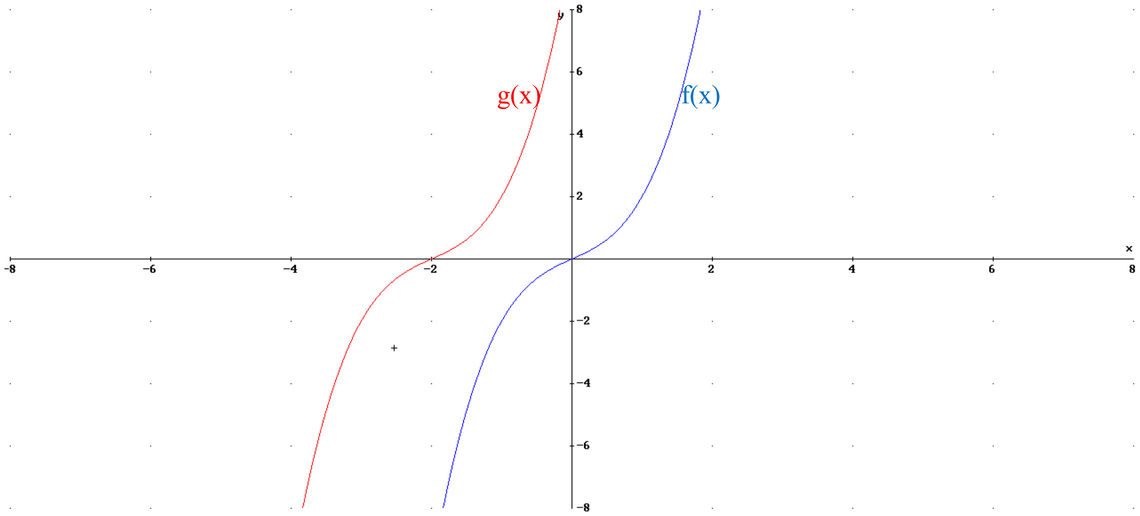
Tema 10. Funciones (II). Recta, parábola, hipérbola, exponenciales, logaritmos y circulares.

1. Traslados de las gráficas horizontales y verticales

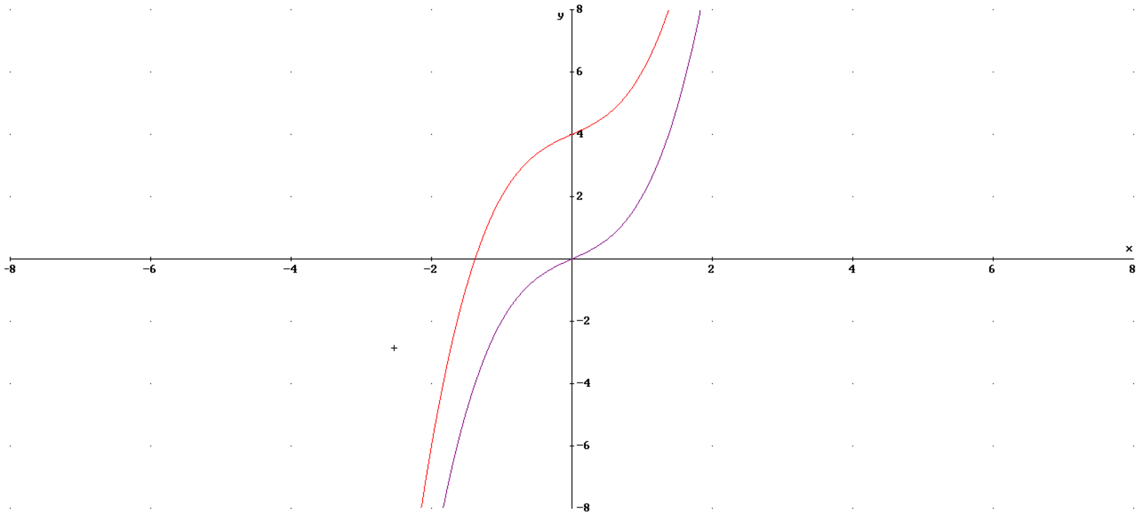
Horizontal: Sea una función y=f(x), si trasladamos la gráfica x_0 unidades en eje OX entonces la expresión analítica de la función resulta de cambiar x por $(x-x_0)$.

Ejemplo: $f(x)=x^3+x$ si lo trasladamos 2 unidades a la izquierda ($x_0=-2$) obtendremos la sunción $g(x)=f(x+2)=(x+2)^3+(x+2)=x^3+6x^2+13x+10$

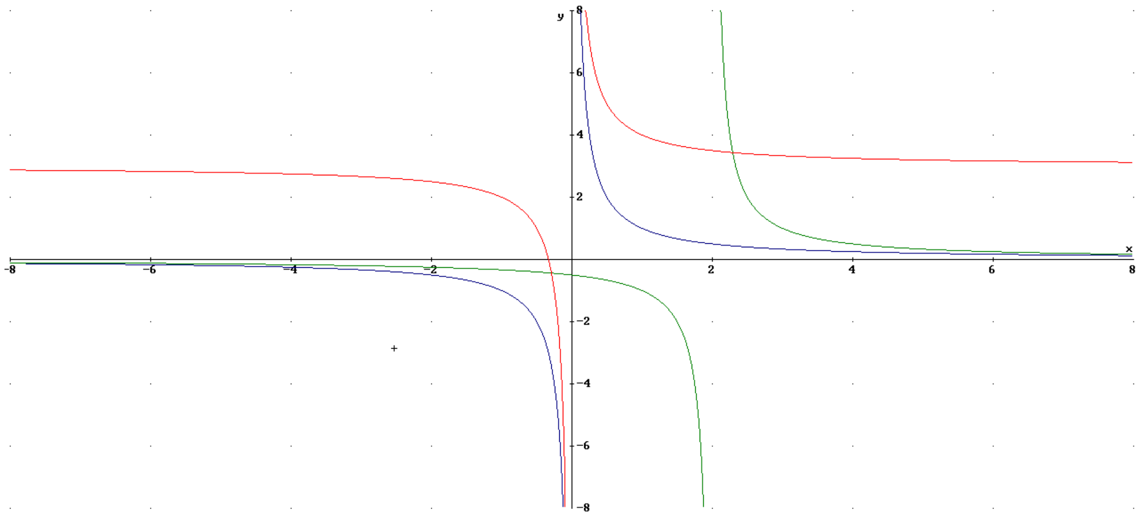


Vertical: Sea una función y=f(x), si trasladamos la gráfica y_0 unidades en eje OY entonces la expresión analítica de la función resulta de cambiar y por $(y-y_0) \rightarrow y=f(x)+y_0$

Ejemplo: $f(x)=x^3+x$ si lo trasladamos 4 unidades hacia arriba ($y_0=4$) obtendremos la sunción $g(x)=x^3+x+4$



Ejercicio obtener la expresión analítica de g(x), h(x) si f(x)=1/x



Solución: g(x)=3+1/x; h(x)=1/(x-2)

2. Funciones lineales. La recta

La expresión analítica de una recta es y=f(x)=mx+n. Se caracteriza por tener un crecimiento o decrecimiento constante. Un ejemplo claro es la posición de un móvil en el tiempo en el movimiento rectilíneo uniforme. ($s=s_0+v\cdot t$, ejemplo s_0=1m, v=2m/s → s(t)=1+2t).

Veamos el significado de m y n:

1) ***m=pendiente de la recta***, nos explica el crecimiento de la función. Si m>0 crece y si m<0 decrece. Se cumple que m=$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\text{var}\,iacion\ y}{\text{var}\,iacion\ x}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

Si por ejemplo m=2/3→la función crece de tal forma que por cada vez que aumenta 3 unidades la x la y aumenta 2.

2) ***n=ordenada en el origen,*** es el punto de corte de la gráfica con el eje OY (es decir corta en (0,n))

Obtener la expresión analítica a partir de dos puntos: $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$:

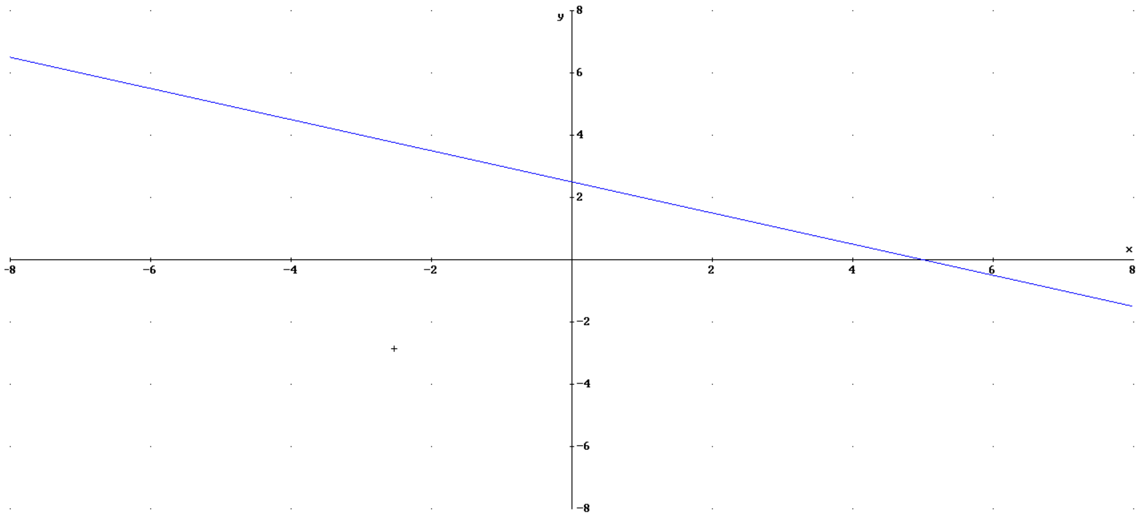
m= $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ → $y=y_1+m(x-x_1)$

Obtener la expresión analítica a partir de la gráfica: podemos obtener la ordenada en el origen viendo el punto de corte con el eje OY, y la pendiente a partir del crecimiento. También podemos obtenerlo a partir de identificar dos puntos en la gráfica y aplicar lo visto antes.

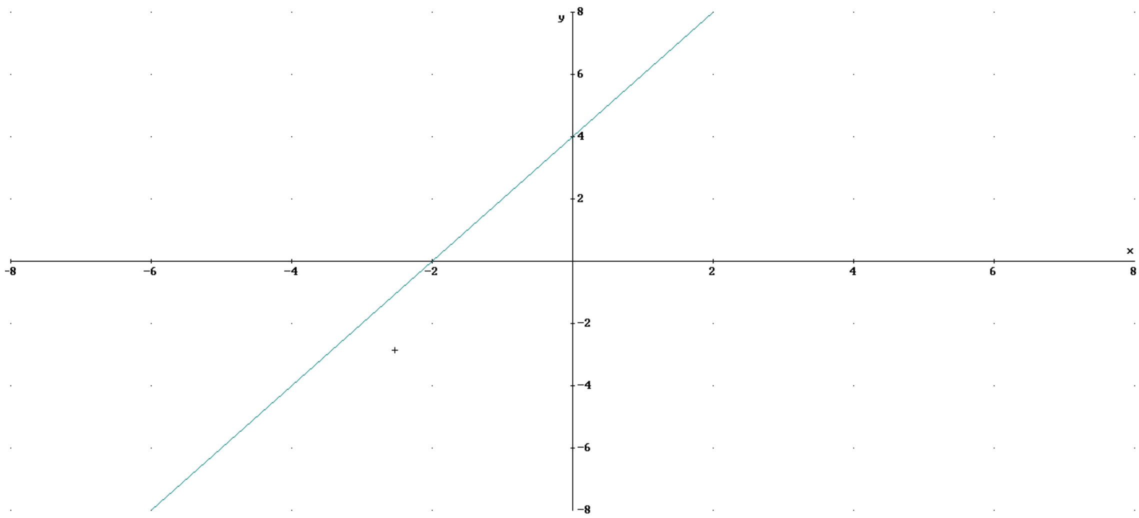
Ejemplo : obtener la expresión analítica de la recta que pasa por $P_1(1,2)$ y $P_2(-1,3)$ y dibujarla

m=$\frac{3-2}{-1-1}=-1/2$

y=2-1/2(x-1)=2.5-0.5x (decrece y corta en el eje y en 2.5)



Obtener la expresión analítica de la recta con la siguiente gráfica:

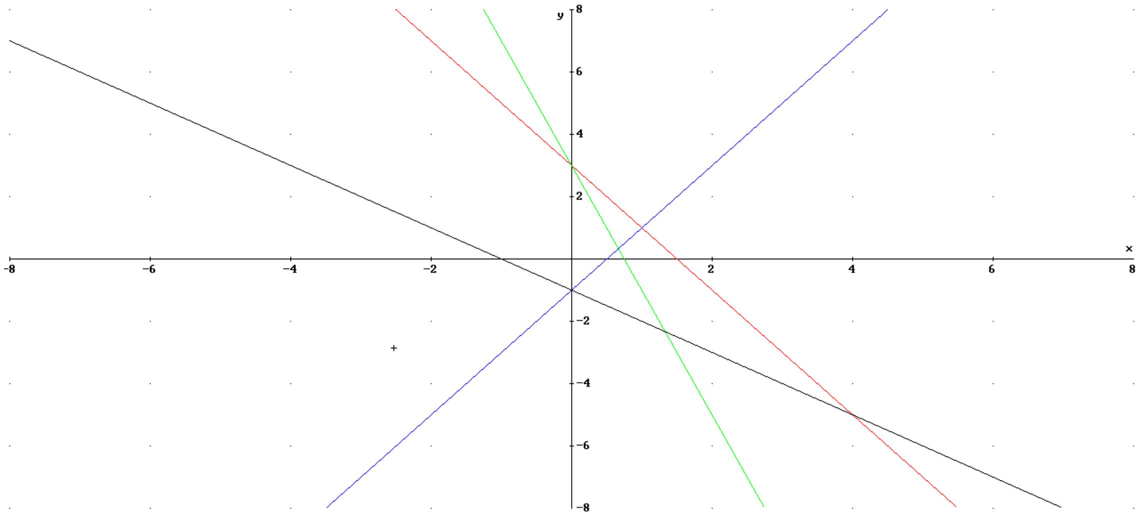


Podemos ver como n=4 y m=2, pues cada unidad que aumenta en x aumenta 2 en y.

y=2x+4

Ejercicio: sin necesidad de obtener la expresión analítica identifica las siguientes rectas:

a) y=-2x+3
b) y=2x-1
c) y=-4x+3
d) y=-x-1



Solución

a→roja
b→azul
c→verde
d→negra

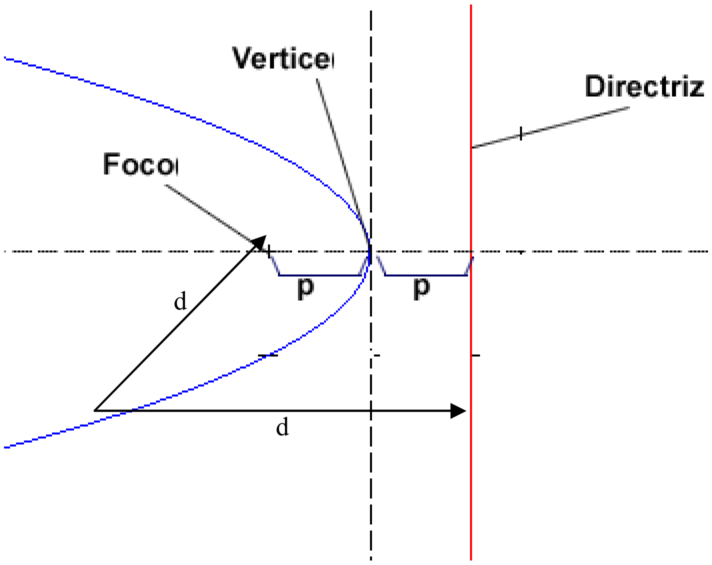
3. Función parabólica

3.1. Introducción. Lugar geométrico.

La parábola es una curva muy importante por aparecer en multitud de ocasiones en la naturaleza y la técnica. Ejemplos:

- Lanzamientos balón de baloncesto
- Chorros de agua
- Las antenas parabólicas
- …

Geométricamente una parábola es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de una recta (directriz) y de un punto (foco de la parábola).



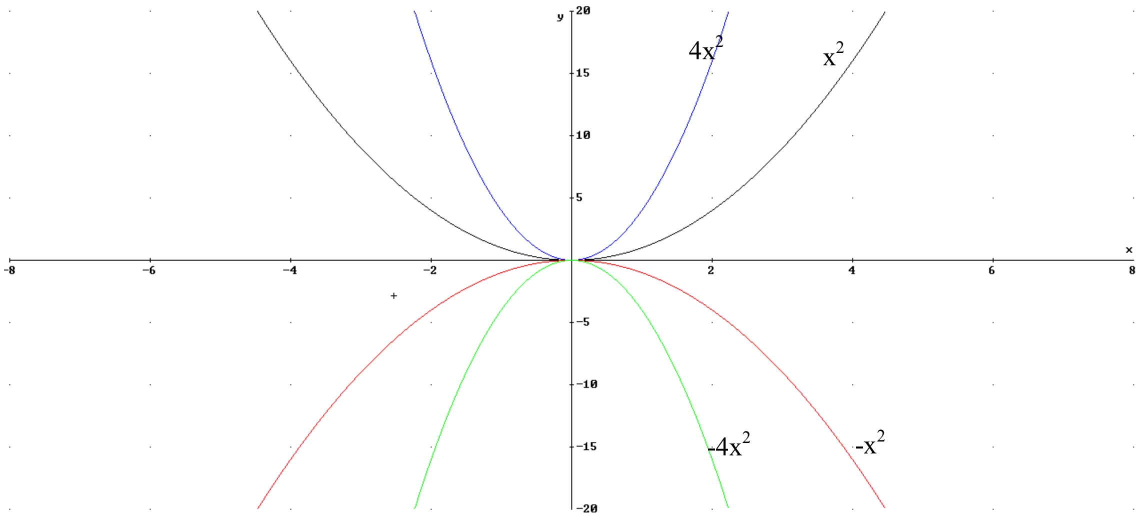
3.2 La parábola como función

En este tema no nos centraremos en la parábola como lugar geométrico sino como función. La parábola es la gráfica de toda función asociada a un polinomio de segundo grado, es decir $y=f(x)=ax^2+bx+c$.

Veamos casos particulares:

3.2.1 Función parabólica del tipo $y=ax^2$

Si tenemos la función $y=f(x)=ax^2$. Para entender como es la parábola en función del parámetro a veamos 4 casos distintos:

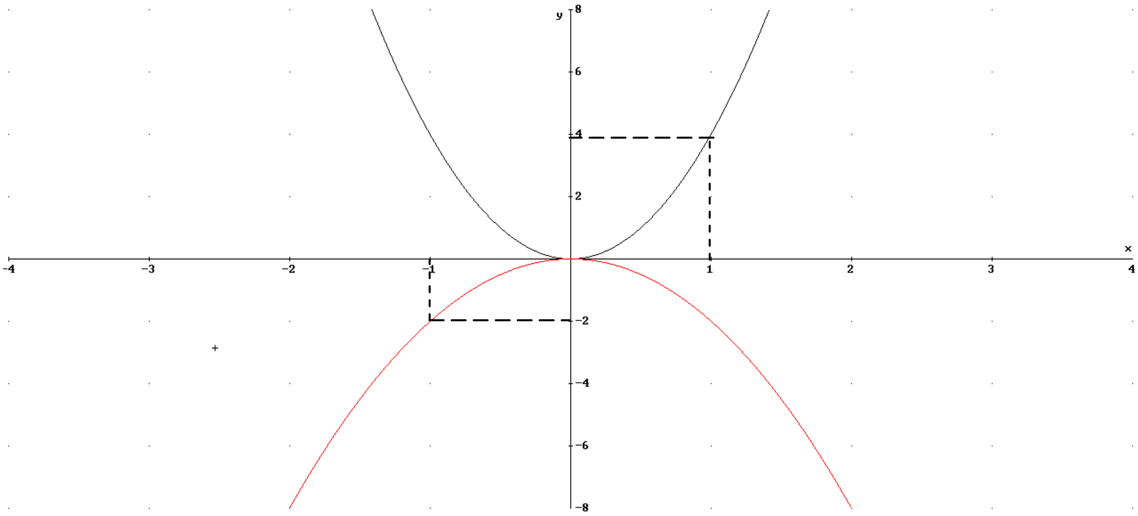


Vemos que difieren si a es positiva o negativa, así tenemos:

a) Si $a>0$, sus propiedades son las siguientes:
- Su vértice en origen V(0,0) que es un mínimo
- Cóncava
- Simétrica con eje OY (par)
- Creciente en $(0,\infty)$ y decreciente en $(-\infty,0)$
- A mayor valor de a más rápido crece y decrece

b) Si $a<0$, sus propiedades son las siguientes:
- Su vértice en origen V(0,0) que es un máximo
- Convexa
- Simétrica con eje OY (par)
- Decreciente en $(0,\infty)$ y creciente en $(-\infty,0)$
- A menor valor (más negativo) de a más rápido crece y decrece

Ejercicio: obtener la expresión analítica de las siguientes gráficas:



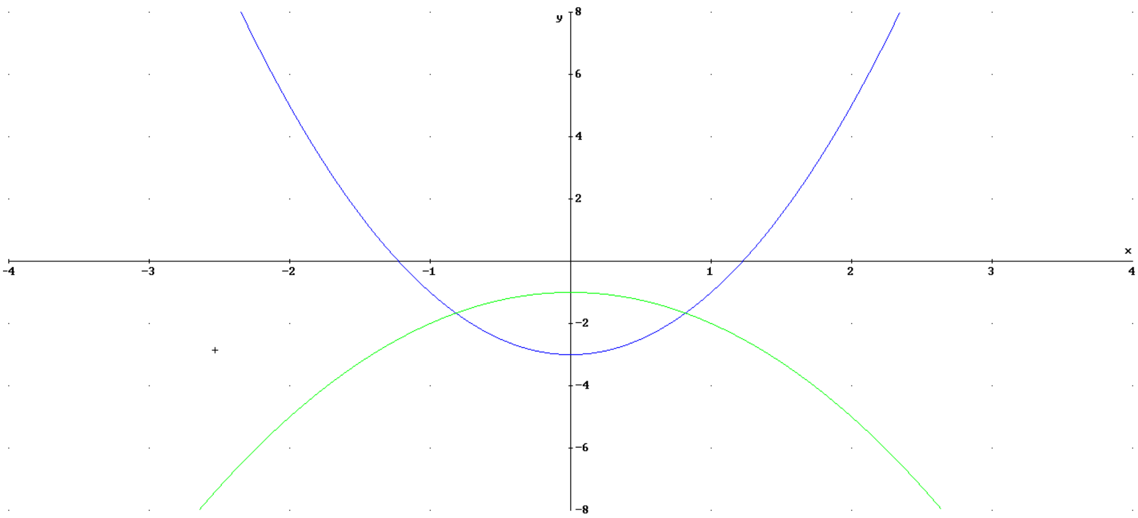
a) V(0,0) → $y=4\cdot x^2$ P(1,4) →$4=a\cdot 1^2$→ a=4

b) V(0,0) →$y=-2\cdot x^2$ P(-1,-2) → $-2=a\cdot(-1)^2$ →a=-2

3.2.2 Función parabólica del tipo $y=ax^2+c$

Para entender la gráfica tendremos que pensar que es una traslación en el eje OY de c unidades. De esta forma la gráfica es igual que la de $a\cdot x^2$ pero c unidades desplazada, del tal forma que el vértice situado en V(0,c).

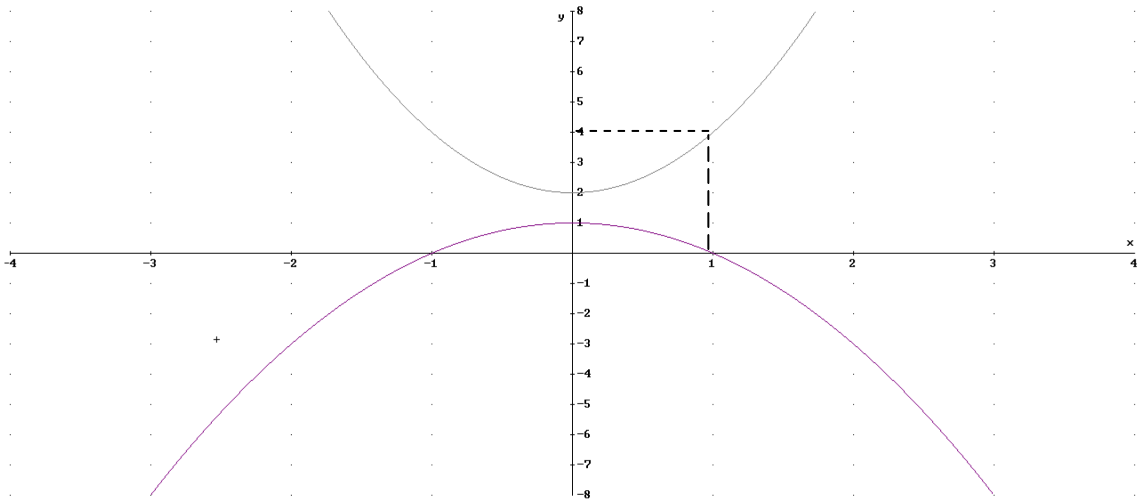
Ejemplos: $y=2x^2-3$; $y=-x^2-1$



Puntos importantes son los de corte con el eje OX (es decir y=0). Sólo cortarán con el eje las que tenga a>0 y c<0 o a<0 y c>0. En nuestro ejemplo:

$$0=2x^2-3 \rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}} \rightarrow A(\sqrt{\frac{3}{2}},0) , B(-\sqrt{\frac{3}{2}},0)$$

Ejercicio: obtener la expresión analítica de las siguientes gráficas:



a) V(0,2) → c=2. P(1,4) $y=ax^2+2$ → $4=a\cdot 1^2+2$ → a=2 → $y=2x^2+2$
b) V(0,1) → c=1 P(1,0) $y=ax^2+1$ → $0=a\cdot 1^2+1$ → a=-1 → $y=-x^2+1$

3.2.3 Función parabólica del tipo $y=ax^2+bx+c$

Para entender la gráfica basta con expresar la función de la siguiente forma $y=y_0+a(x-x_0)^2$, entonces será igual que el de la parábola $y=ax^2$ pero desplazada x_0 en el eje OX e y_0 en el eje OY, por tanto el vértice en $V(x_0,y_0)$. Relacionemos entonces a, b y c con x_0 e y_0:

$$y=a\cdot(x-x_0)^2+y_0=a\cdot x^2-2ax_0\cdot x+ax_0^2+y_0=ax^2+bx+c$$

$$-2a\cdot x_0=b \rightarrow x_0=\frac{-b}{2a}$$

$$a\cdot x_0^2+y_0=c \rightarrow y_0=c-a\cdot x_0^2$$

En la práctica se calcula $x_0=\frac{-b}{2a}$ e y_0 se obtiene sustituyendo en la función $x_0 \rightarrow y_0=f(x_0)$

La gráfica como hemos dicho es igual que la de $y=ax^2$ pero desplazada x_0 unidades en el eje OX e y_0 en eje OY, de tal forma que el vértice $V(x_0,y_0)$

Ejemplo: representar y poner en forma $y=a\cdot(x-x_0)^2+y_0$ la función $y=f(x)=2x^2-4x-2$.

Calculemos el vértice $x_0=\frac{-b}{2a}=1$, $y_0=f(1)=-4$ → V(1,-4)

$y=f(x)=2\cdot(x-1)^2-4$

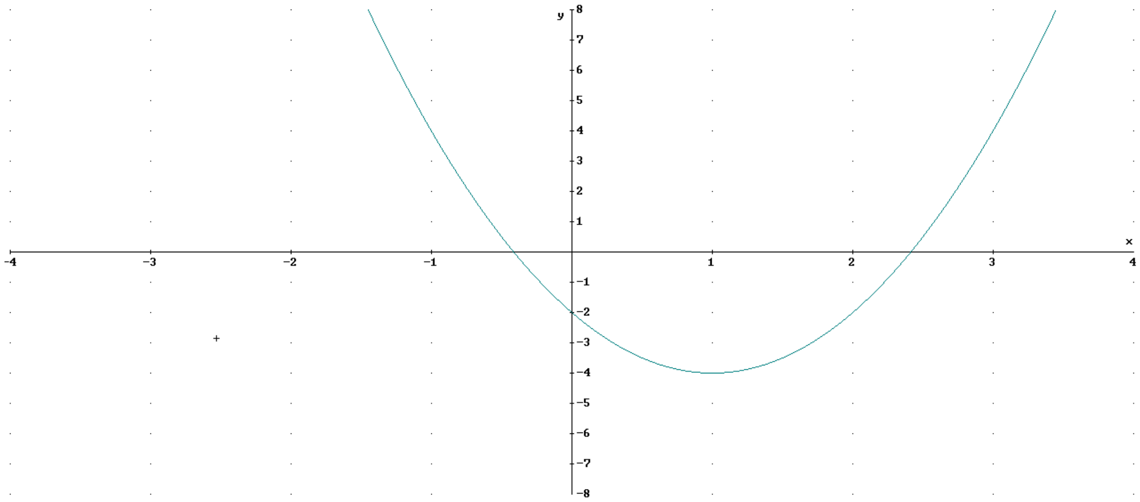
Para representarla damos valores entorno del vértice

X	Y
0	-2
1	**-4**
2	-2

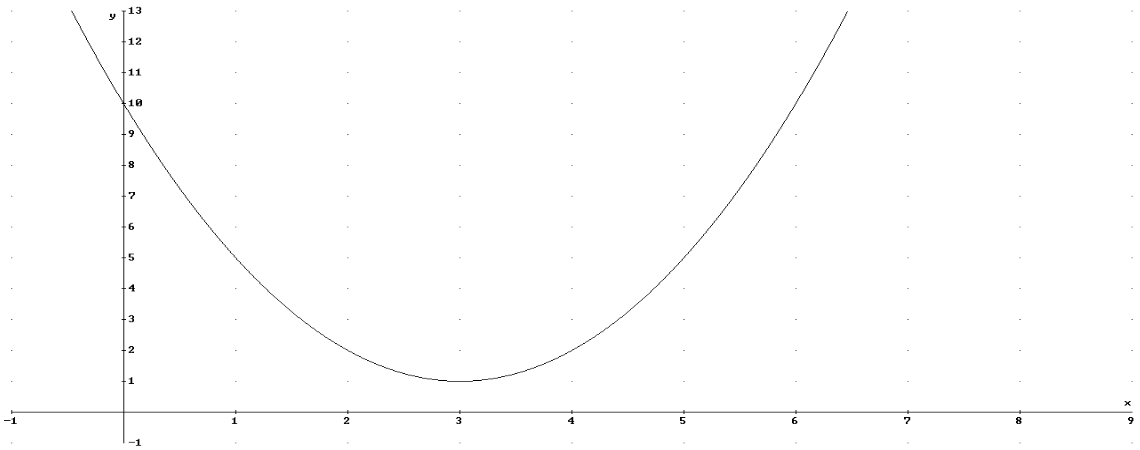
 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Puntos de corte con eje OX (y=0)→ $0=2\cdot(x-1)^2-4 \rightarrow 4=2\cdot(x-1)^2 \rightarrow (x-1)^2=2$ →

$x-1=\pm\sqrt{2} \rightarrow x=1\pm\sqrt{2} \rightarrow (1+\sqrt{2},0), (1-\sqrt{2},0)$



Ejercicio: obtener la expresión analítica de la siguiente gráfica:



El vértice es V(3,1) → $y=1+a\cdot(x-3)^2$. Para calcular a sustituimos un punto, por ejemplo P(0,10)→ $10=1+a\cdot 9 \rightarrow a=1$:

$y=1+(x-3)^2=1+x^2-6x+9=x^2-6x+10$

4. Función exponencial

4.1. Introducción

Antes de ver la función exponencial recordemos las definición de exponente y alguna de sus propiedades.

- Si $x\in N \rightarrow a^n=\overbrace{a\cdot a\cdot ....\cdot a}^{n}$

- Si $x\in Z \rightarrow a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$

- Si $x\in Q \rightarrow a^{p/q}=\sqrt[q]{a^p}$

Propiedades:

1) $(a^x)^y=a^{xy}$ → *ejemplo:* $5^{2x}=25^x$
2) $a^x \cdot b^x=(a \cdot b)^x$ →*ejemplo:* $3^x \cdot 2^x=6^x$
3) $a^1=a$
4) $a^0=1$

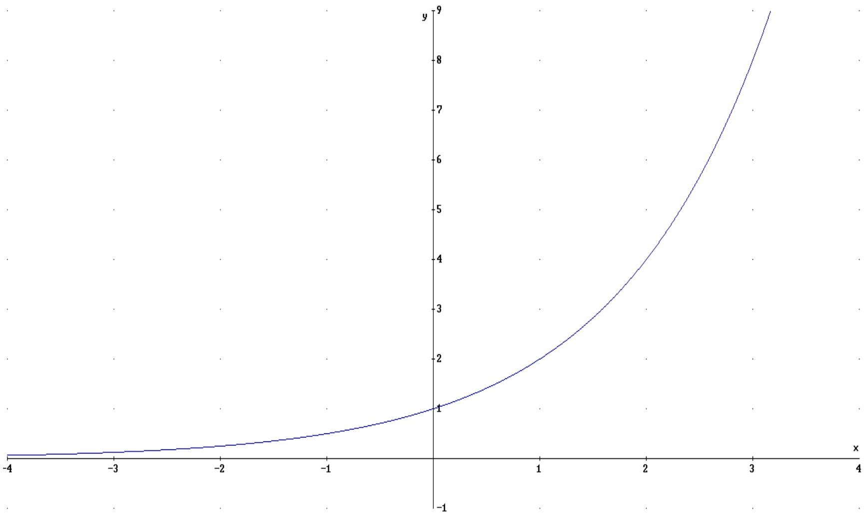
4.2. Representaciones de funciones exponenciales del tipo $y=a^x$

Vamos a distinguir dos casos de funciones exponenciales:

a) a>1

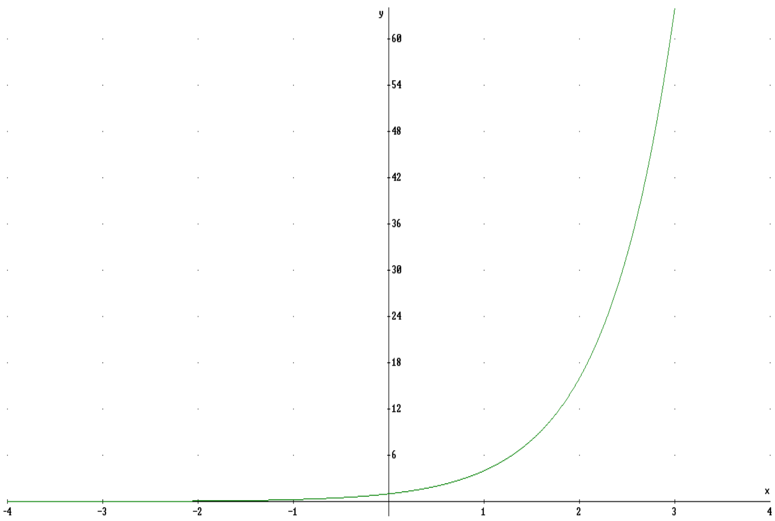
$y=2^x$

x	y
3	8
2	4
1	2
0	1
-1	½
-2	1/4
-3	1/8



a) $y=4^x$

x	y
3	64
2	16
1	4
0	1
-1	¼
-2	1/16
-3	1/64



 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

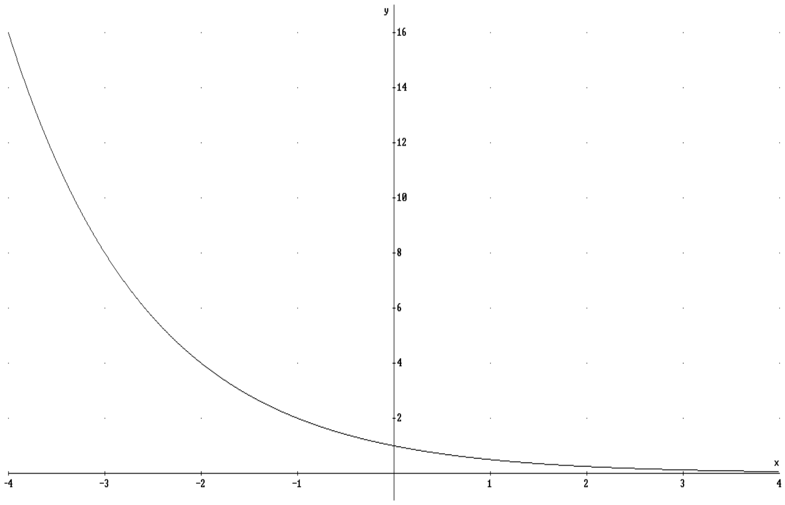
Propiedades exponentes si a>1:

1) Dom(f)=R
2) Continua en R
3) Creciente en R
4) Concava
5) Asíntota horizontal y=0 x→-∞
6) Definida positiva (siempre positiva)
7) A mayor valor de a más rápido crece

b) 0<a<1

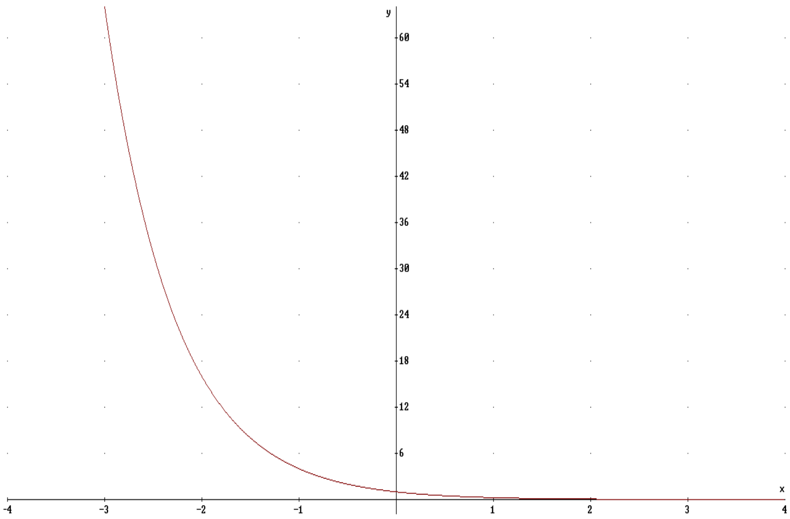
$y=(1/2)^x$

x	y
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	½
2	1/4
3	1/8



b) $y=(1/4)^x$

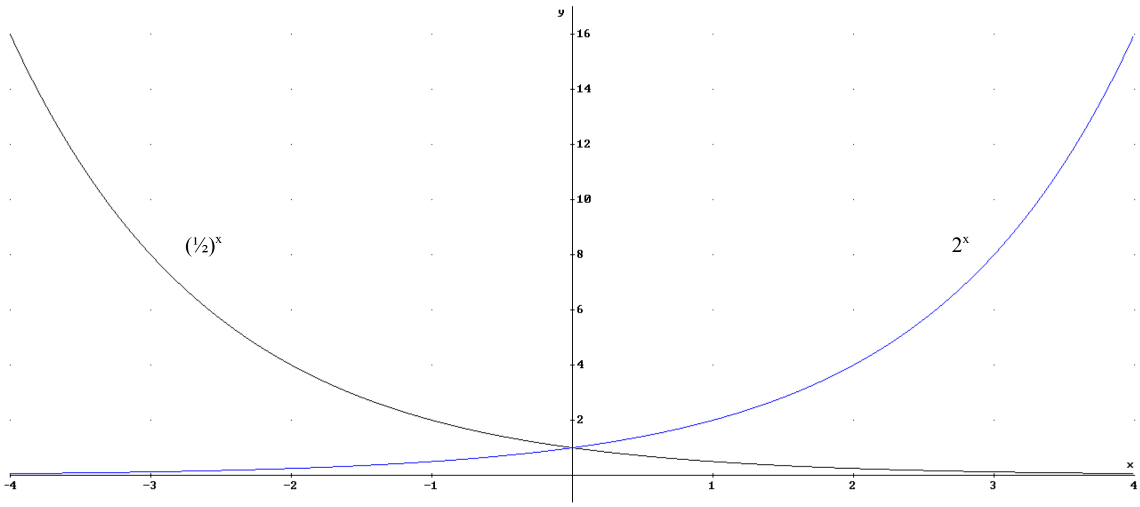
x	Y
-3	64
-2	16
-1	4
0	1
1	¼
2	1/16
3	1/64



Propiedades exponentes si 0<a<1:

1) Dom(f)=R
2) Continua en R
3) Decreciente en R
4) Cóncava
5) Asíntota horizontal y=0 $x \rightarrow +\infty$
6) Definida positiva (siempre positiva)
7) Cuanto más se acerca a cero la base más rápidamente decrece.

Nota: a^x simétrica respecto al eje con $(1/a)^x$



Ejercicio:

Representa y di cual es la base de las siguientes funciones exponenciales:

a) $y=3^{2x}$
b) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$

Solución: la función exponencial es de la forma $y=a^x$, y en nuestro caso tenemos que el exponente es 2x, de esta forma tenemos que incluir el 2 dentro de la base, veamos como:

$y=3^{2x}=(3^2)^x=9^x$

$$y=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}=\left(\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)^x=\left(\frac{1}{9}\right)^x$$

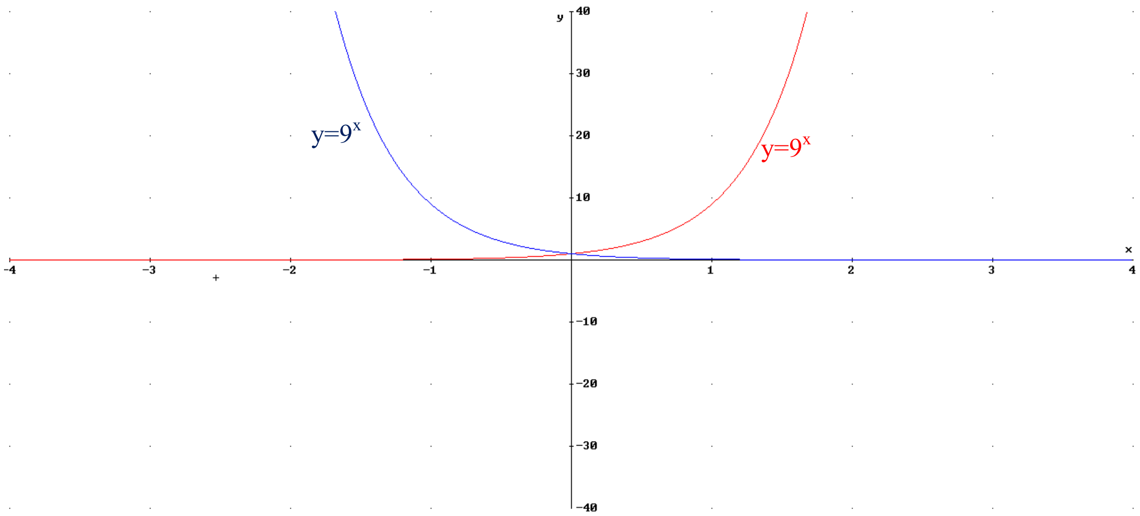
Luego las basen son 9 y 1/9. Veamos las gráficas

$y=9^x$

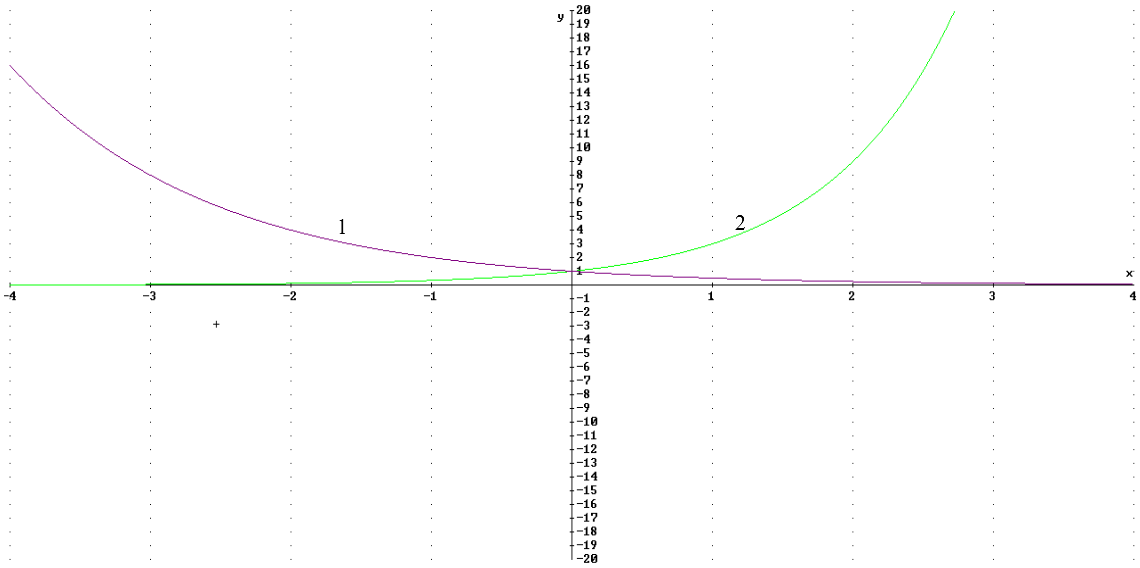
x	y
-3	1/729
-2	1/81
-1	1/9
0	1
1	9
2	81
3	729

$y=(1/9)^x$

x	y
-3	729
-2	81
-1	9
0	1
1	1/9
2	1/81
3	1/729



Ejercicio: obtener la expresión analítica de las siguientes funciones exponenciales



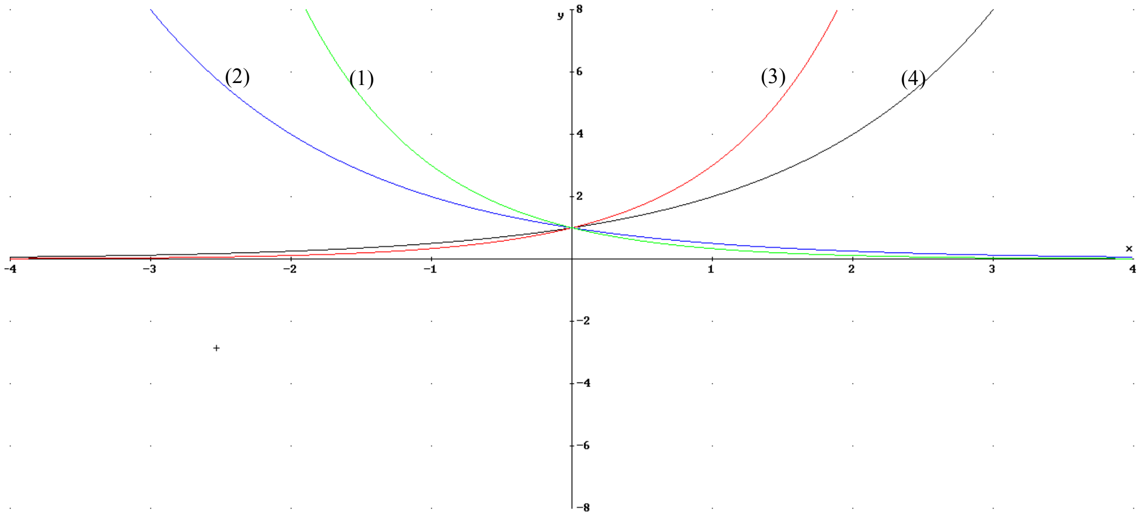
Veamos la expresión analítica de (1). Sabemos que 0<a<1 pues es decreciente. Busquemos un punto de la gráfica que no sea el (0,1). Por ejemplo en (-1, 2).

$y=a^x \rightarrow 2=a^{-1} \rightarrow 2=1/a \rightarrow a=1/2$

Veamos la expresión analítica de (2). Sabemos que a>0 pues es creciente. Busquemos un punto de la gráfica que no sea el (0,1). Por ejemplo en (1, 3).

$y=a^x \rightarrow 3=a^1 \rightarrow a=3$

Ejercicio: Identifica las siguientes gráficas con la expresión analítica correspondientes.



(a) $y=2^x$
(b) $y=3^x$
(c) $y=(0.5)^x$
(d) $y=(1/3)^x$

Solución:

(a)=(4), (b)=(3), (c)=(2), (d)=(1)

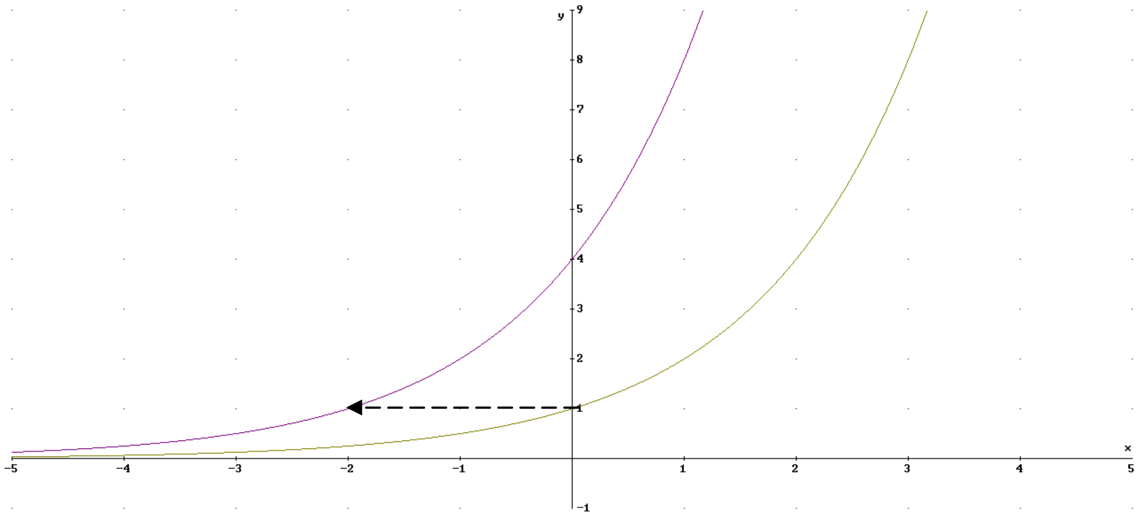
4.3. Funciones exponenciales desplazadas

En este apartado veremos las funciones cuando desplazamos las gráficas en los ejes:

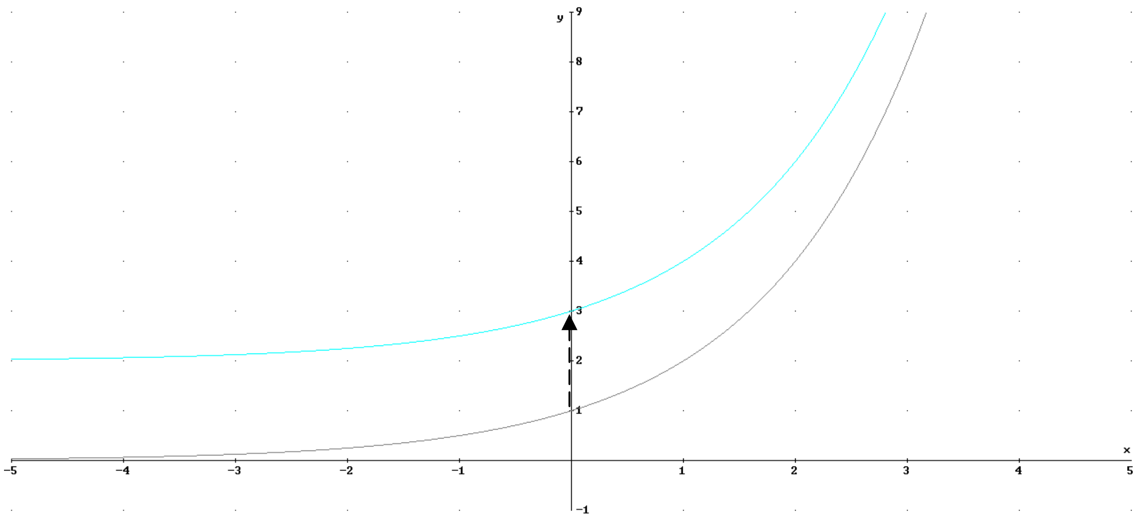
- Si desplazamos la gráfica en el eje OX un valor x_0 tenemos que la función gráfica es $y=a^{x-xo}=a^x \cdot a^{-xo}$
- Si desplazamos la gráfica en el eje OY un valor y_0 tenemos que la función gráfica es $y=a^x+y_0$

Ejemplos:

a) $y=4\cdot 2^x \rightarrow y=2^2\cdot 2^x \rightarrow y=2^{x+2} \rightarrow x_0=-2$



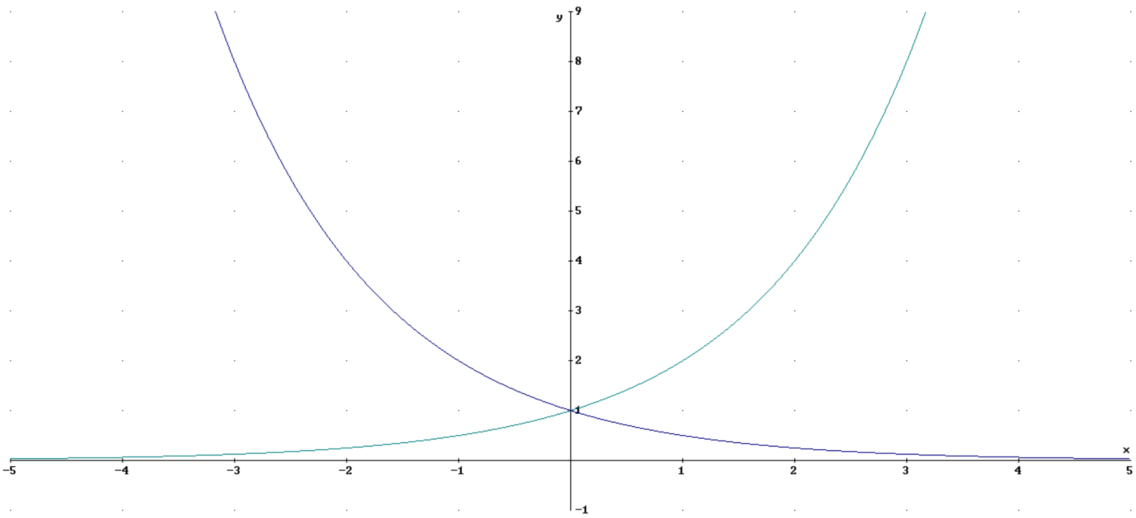
b) $y=2+2^x \rightarrow y_0=2$ (la asíntota horizontal pasa a ser y=2)



Ejercicio: representar las siguientes gráficas sin necesidad de tabla de valores, sólo a partir de la gráfica de $y=(0.5)^x$ y de $y=2^x$

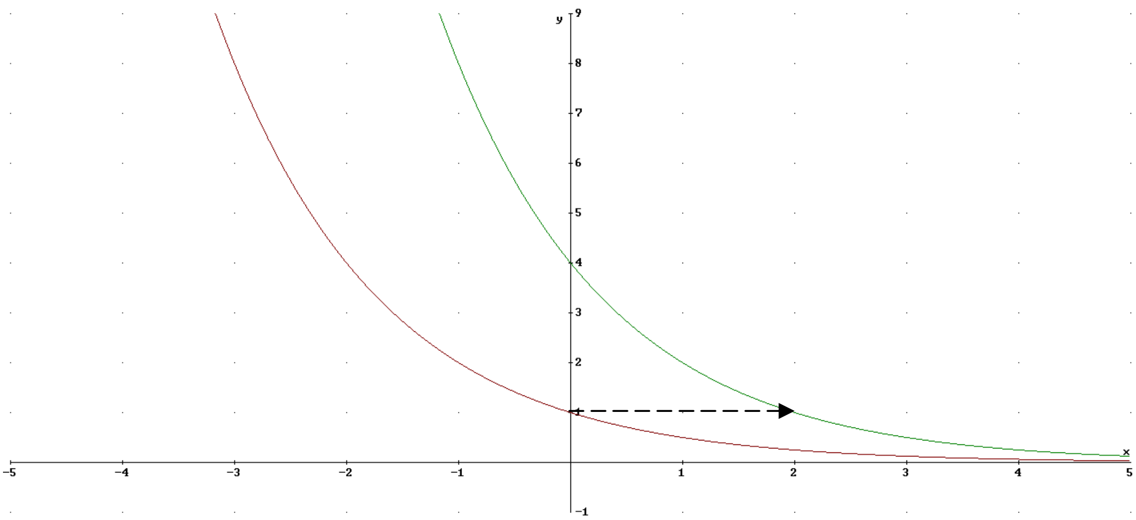
a) $y=4\cdot 0.5^x=4\cdot(1/2)^x=(1/2)^{-2}(1/2)^x \rightarrow y=(1/2)^{x-2} \rightarrow x_0=2$ (desplazamos 2 ejeOX)

b) $y=2^x-3 \rightarrow y_0=-3$ (desplazamos -3 en eje OY)

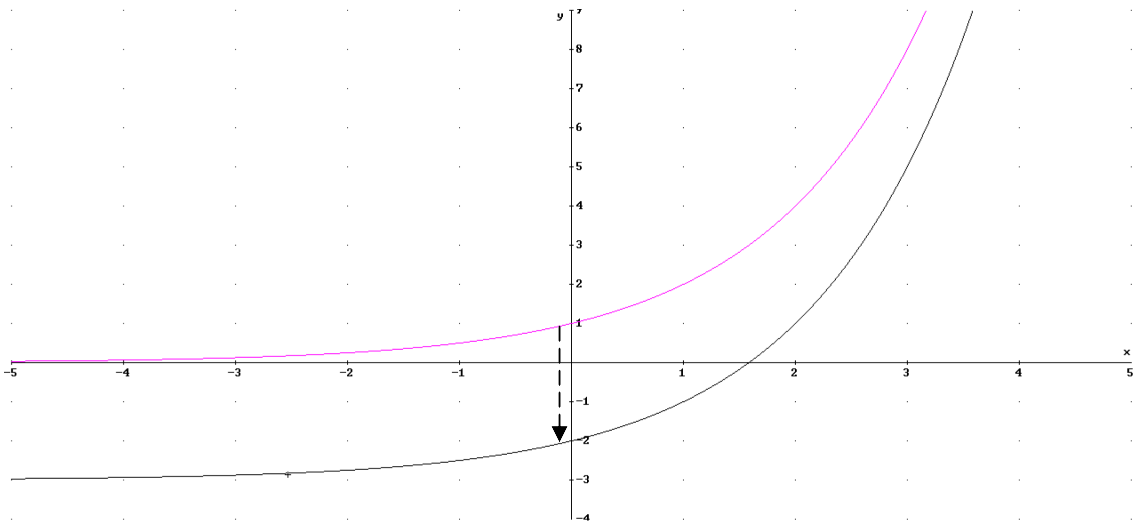


Solución:

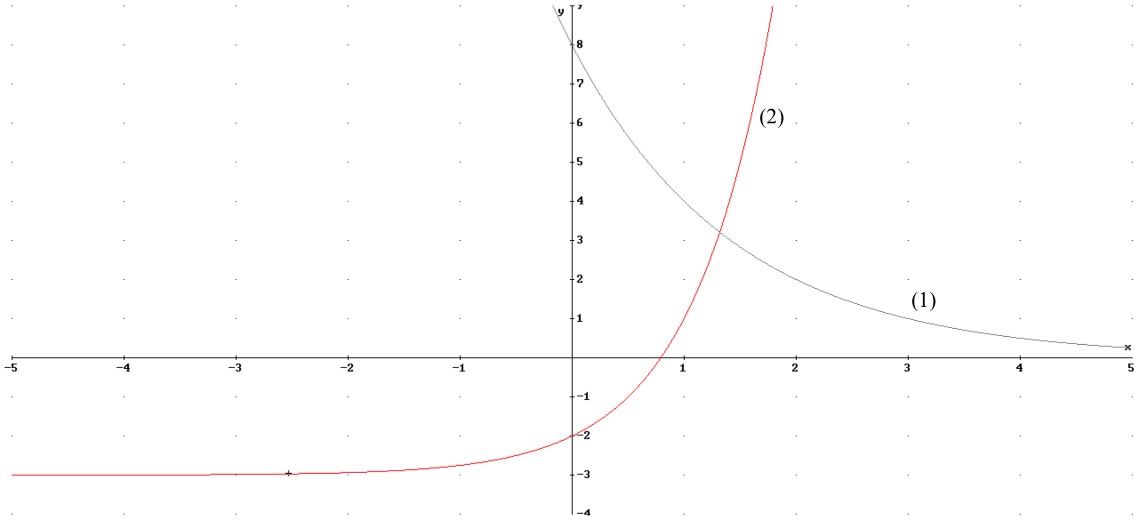
a)



b)



Identifica la expresión analítica de las siguientes funciones exponenciales:



Solución:

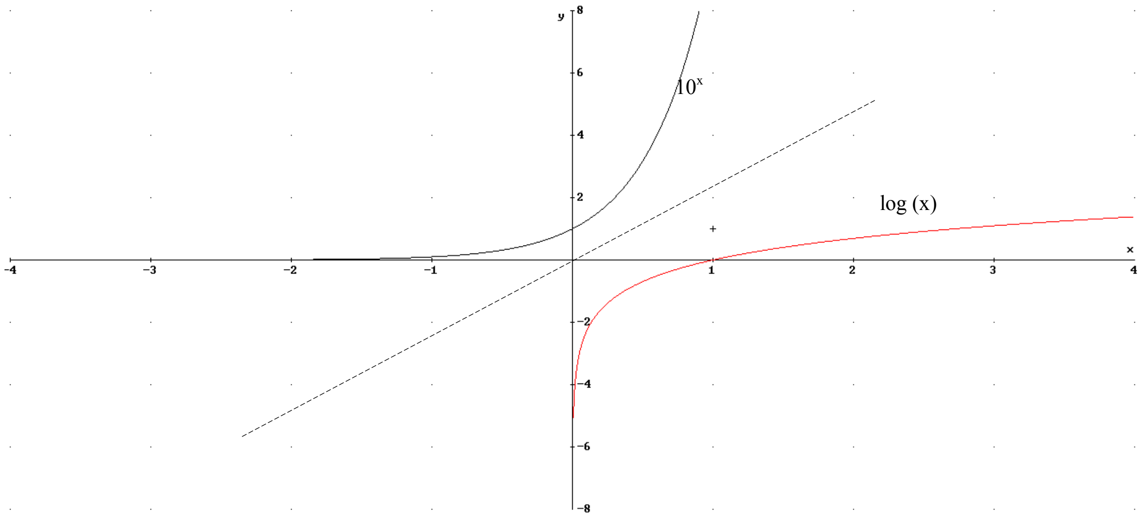
(1) Es decreciente luego la base menor que uno. La asíntota sigue siendo el eje OX, luego está desplazado en el eje OY. Para ver lo que se desplaza miramos a ver en qué valor de x la y=1, que en la gráfica no desplazada ocurren en x=1. Si y=1 → x=3. Luego x_0=3. Calculemos la base: $y=a^{x-3}$ pasa por el punto (0,8)→$8=a^{-3}$ a^3=1/8 → a=1/2 →$y=(1/2)^{x-3}$

(2) Es creciente luego la base es mayor que uno. La asíntota horizontal es y=-3, luego está desplazada -3 unidades en el eje OY→ y_0=-3. Calculemos la base: $y=a^x-3$ pasa por el punto (0,-2) →$-2=a^0-3$ →-2=1-3. No da información, busquemos otro punto el (1,1) → $1=a^1-3$ → a=4 → $y=4^x-3$

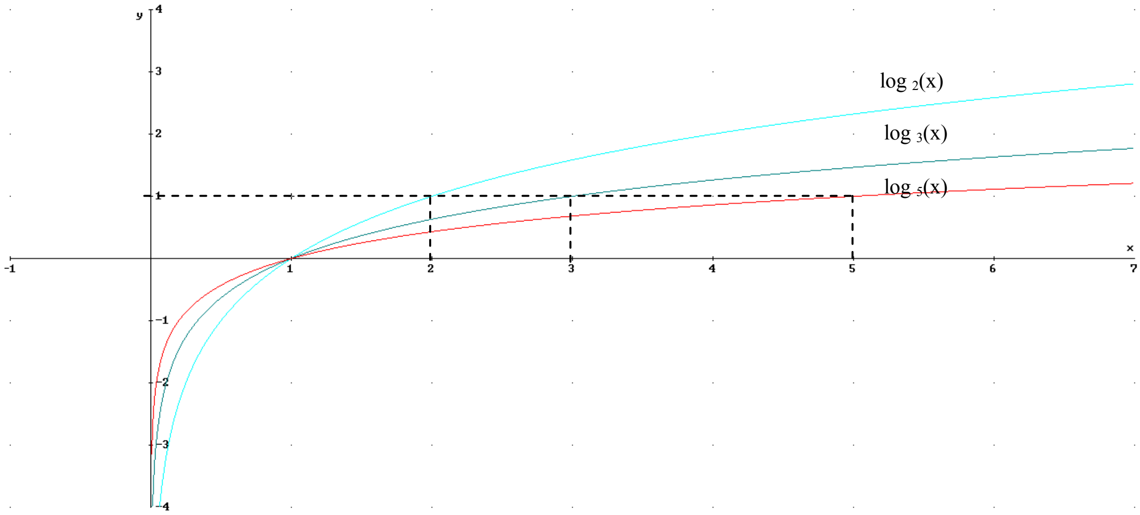
5. Función logarítmica

La gráfica de $y=\log_a x$ es simétrica respecto a la recta y=x (bisectriz de los ejes). Para representarla podemos distinguir entre cuando a>1 y 0<a<1:

1.) **<u>a>1</u>** : Ejemplo: y=log (x)



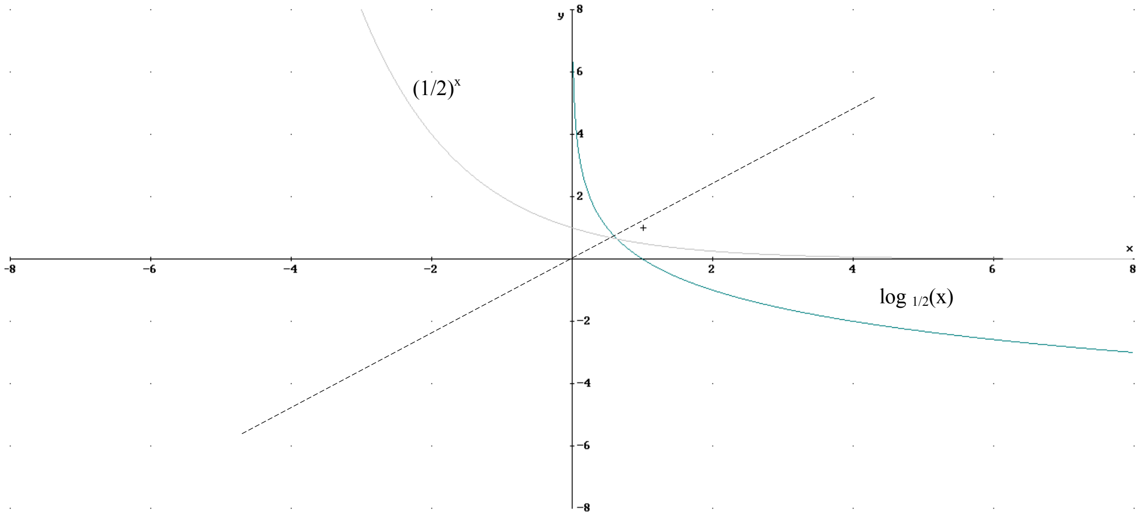
Veamos cómo son las gráficaS según el valor de a (siendo en las dos a mayor que uno):



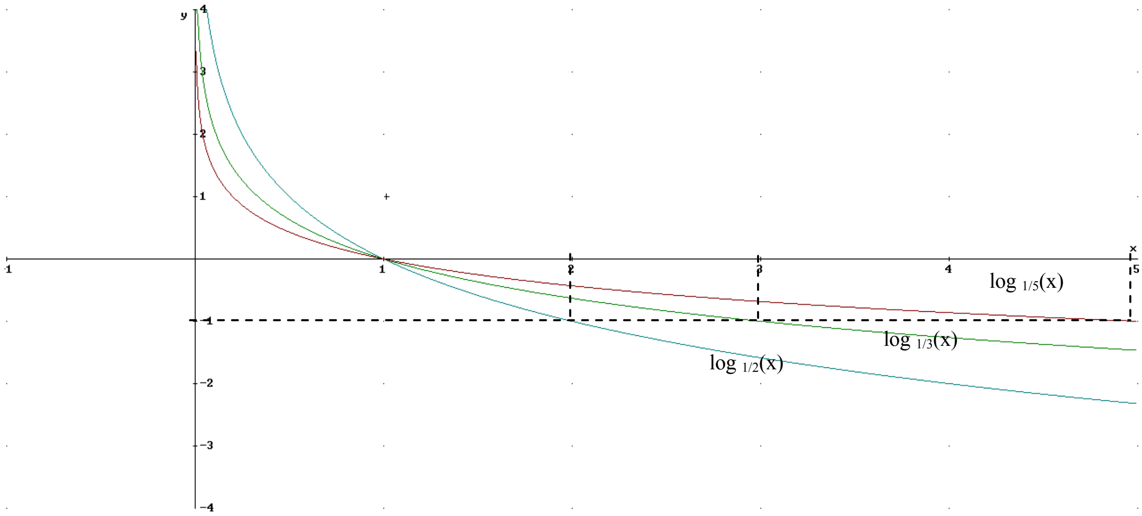
Propiedades y=log$_a$x con a>1:

1) Dom=R^+=(0,∞)
2) Asíntota vertical x=0 tendiendo y→-∞
3) Pasa por (a,1) y por (1,0)
4) Creciente
5) Convexa
6) Cuanto mayor sea a menos crece

2) <u>0<a<1</u>: Ejemplo: y=log$_{1/2}$(x)



Veamos cómo son las gráfica según el valor de a (siendo en las dos menor que uno):



Propiedades $y=\log_a x$ con $0<a<1$:

1) $Dom=R^+=(0,\infty)$
2) Asíntota vertical x=0 tendiendo $y\rightarrow\infty$
3) Pasa por (a,-1) y por (1,0)
4) Decreciente
5) Concava
6) Cuanto menor sea a (más cerca de cero) menos decrece

6. Función proporcionalidad inversa.

Son funciones cuyas gráficas son hipérbolas equiláteras cuyas asíntotas son paralelas a los ejes coordenados.

6.1. La función y=k/x

La función y=k/x es la hipérbola cuyas asíntotas son los ejes coordenados x=0 e y=0.

Dependiendo del valor de k, tendremos:

a) k>0 las ramas de las hipérbolas en los cuadrantes I y III (función decreciente)

b) k<0 las ramas de las hipérbolas en los cuadrantes II y IV (función creciente).

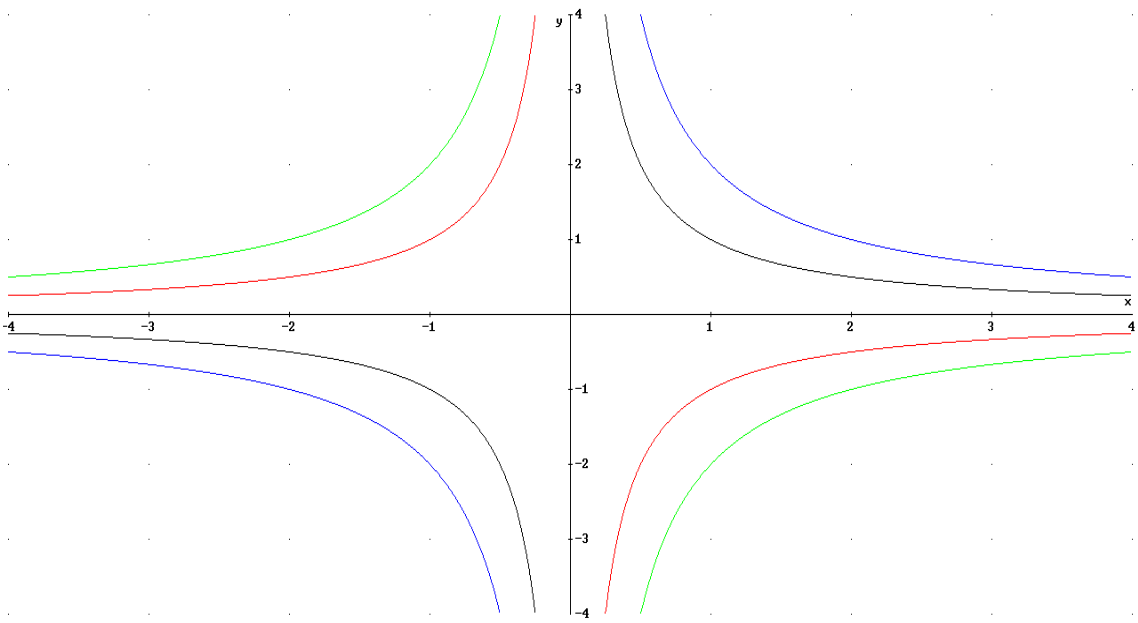
Cuanto menor sea |k| mayor es el crecimiento (k<0) o el decrecimiento (k>0)

Ejemplos: $y=\frac{1}{x}, y=\frac{2}{x}, y=-\frac{1}{x}, y=-\frac{2}{x}$

Para representarla damos valores próximos a la asíntota vertical (x=0)

$$y=\frac{1}{x}, y=\frac{2}{x}, y=-\frac{1}{x}, y=-\frac{2}{x}$$

x	$y=\frac{1}{x}$	$y=\frac{2}{x}$	$y=-\frac{1}{x}$	$y=-\frac{2}{x}$
10	0.1	0.2	-0.1	-0.2
2	0.5	1	-0.5	-1
1	1	2	-1	-2
0.1	10	20	-10	-20
0	±∞	±∞	±∞	±∞
-0.1	-10	-20	10	20
-1	-1	-2	1	2
-2	-0.5	-1	0.5	1
-10	-0.1	-0.2	0.1	0.2



 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

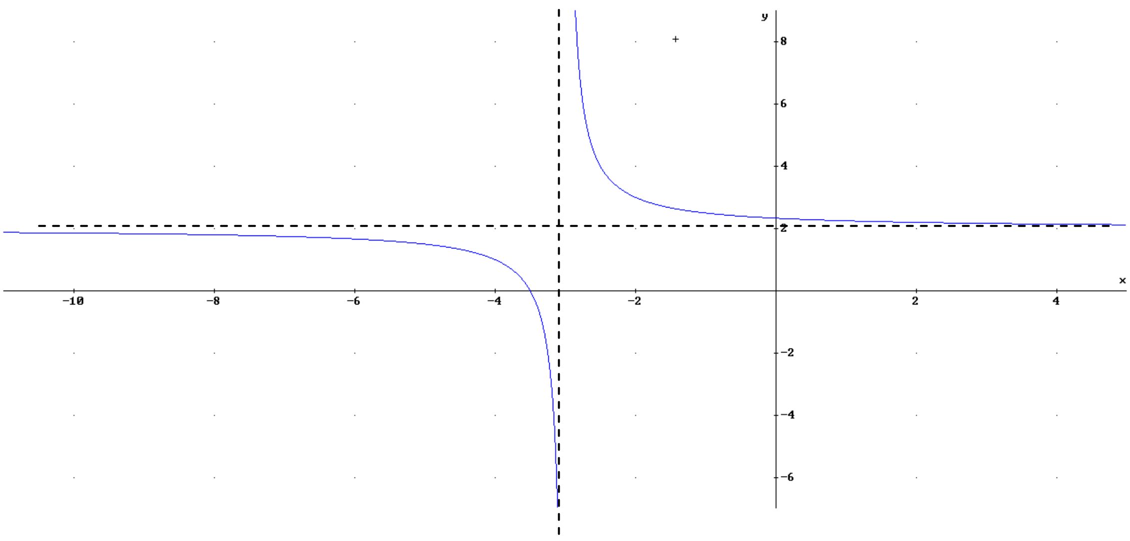
6.2 Función $y=y_0+k/(x-x_0)$

La función $y = y_o + \frac{k}{x-x_0}$ es equivalente a la función $y=\frac{k}{x}$ desplazada x_0 unidades en el eje OX e y_0 en el eje OY. De esta forma las asíntotas son $x=x_0$ e $y=y_0$.

Veamos algunos ejemplos:

a) $y = 2 + \frac{1}{x+3}$ → AV: x=-3, AH: y=2

x	$y = 2 + \frac{1}{x+3}$
7	2.1
-1	2.5
-2	3
-2.9	12
-3	±∞
-3.1	-8
-4	1
-5	1.5
-13	1.9

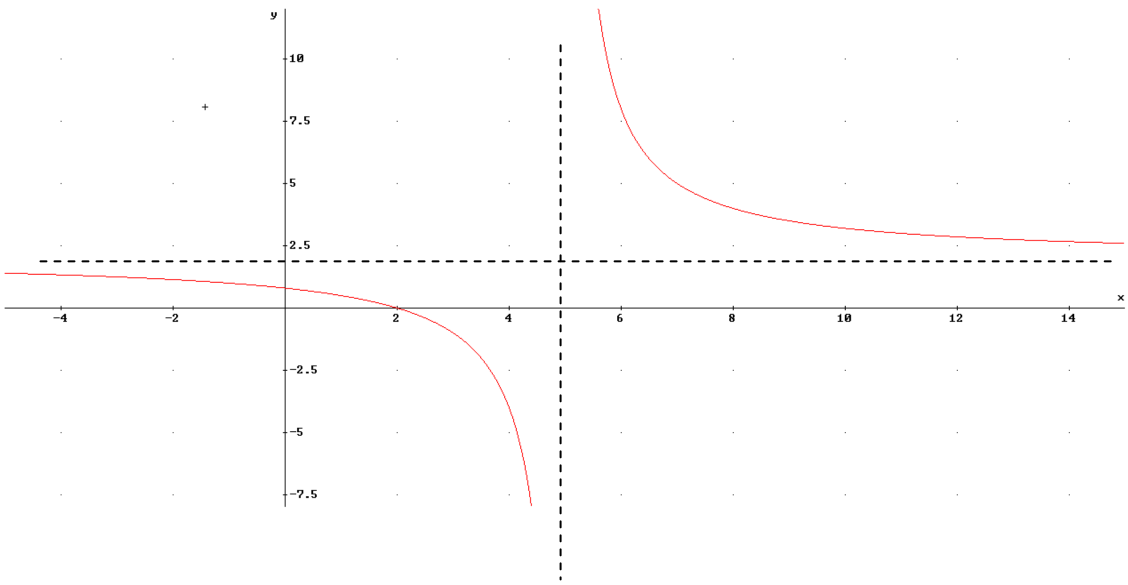


b) $y=f(x)=\frac{2x-4}{x-5}$. Para expresarlo de la forma $y=y_o+\dfrac{k}{x-x_0}$ tendremos que dividir el numerador entre el denominador:

$$\begin{array}{r|l} 2x-4 & x-5 \\ \cline{2-2} -2x+10 & 2 \\ \underline{6} & \end{array}$$

De esta forma la función será: y=f(x)=2+$\frac{6}{x-5}$

x	$y=2+\dfrac{6}{x-5}$
-5	1.4
3	-1
4	-4
4.9	-58
5	±∞
5.1	62
6	8
7	5
15	2.6



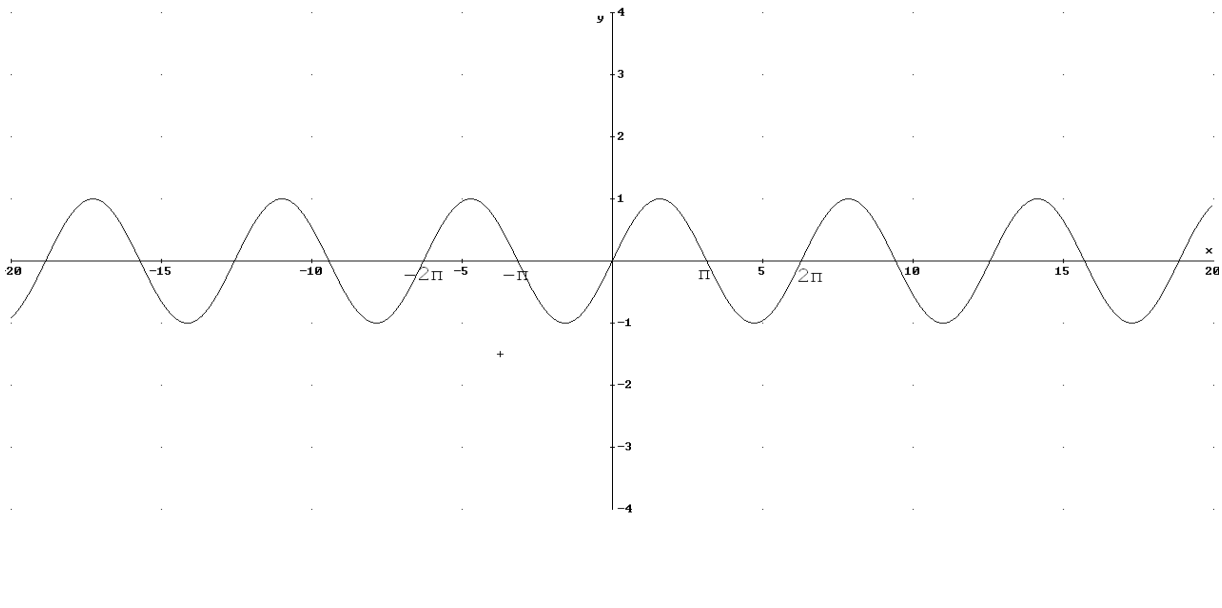
7. Funciones circulares.

Las funciones circulares son aquellas en las que la variable independiente es el ángulo (en radianes) y la dependiente el seno, coseno o tangente de este ángulo. Son las funciones periódicas más utilizadas, en especial en física (ondas, oscilaciones, corriente eléctrica alterna…)

Veamos las gráficas de las funciones circulares:

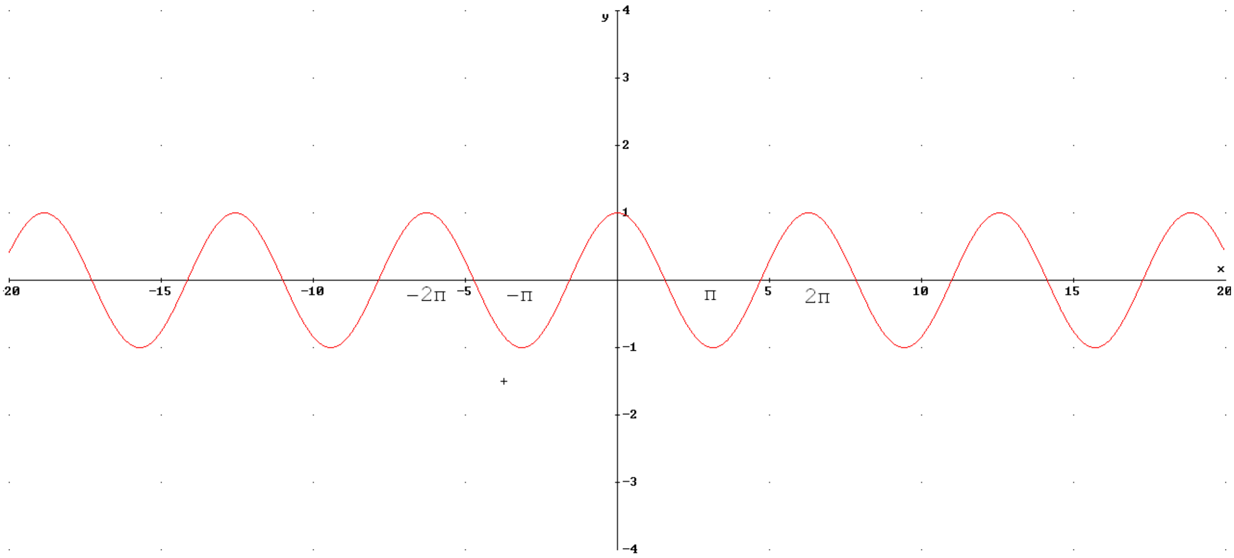
a) y=f(x)=sen(x)

x	y=sen(x)
0	0
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/2$	1
$3\pi/4$	$\sqrt{2}/2$
π	0
$5\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$
$3\pi/2$	0
$7\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$
2π	0



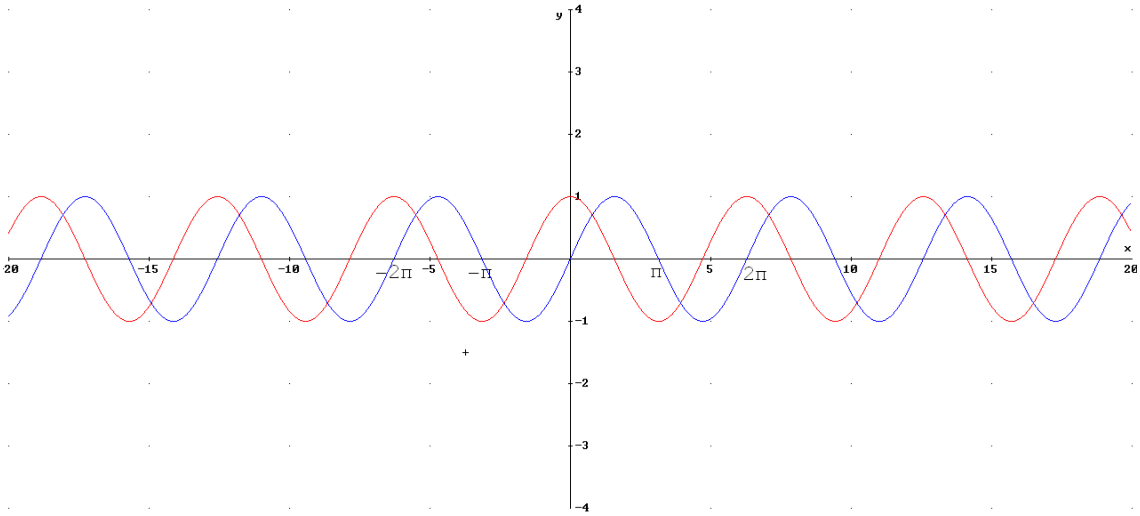
b) y=f(x)=cos(x)

x	y=cos(x)
0	1
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/2$	0
$3\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$
π	-1
$5\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$
$3\pi/2$	0
$7\pi/4$	$\sqrt{2}/2$
2π	1



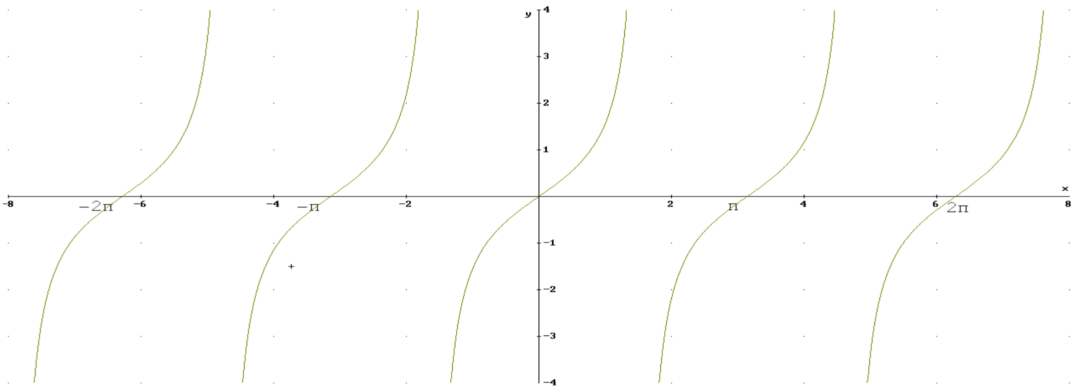
Hay que darse cuenta que la función seno es la misma que la función coseno desplazada $\pi/2$ hacia la derecha→ sen(x)=cos(x-π/2).

Veamos las dos funciones en una misma gráfica:



c) y=f(x)=tg(x)

x	y=tg(x)
0	0
π/4	1
π/2	±∞
3π/4	−1
π	0
5π/4	1
3π/2	±∞
7π/4	-1
2π	0



 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

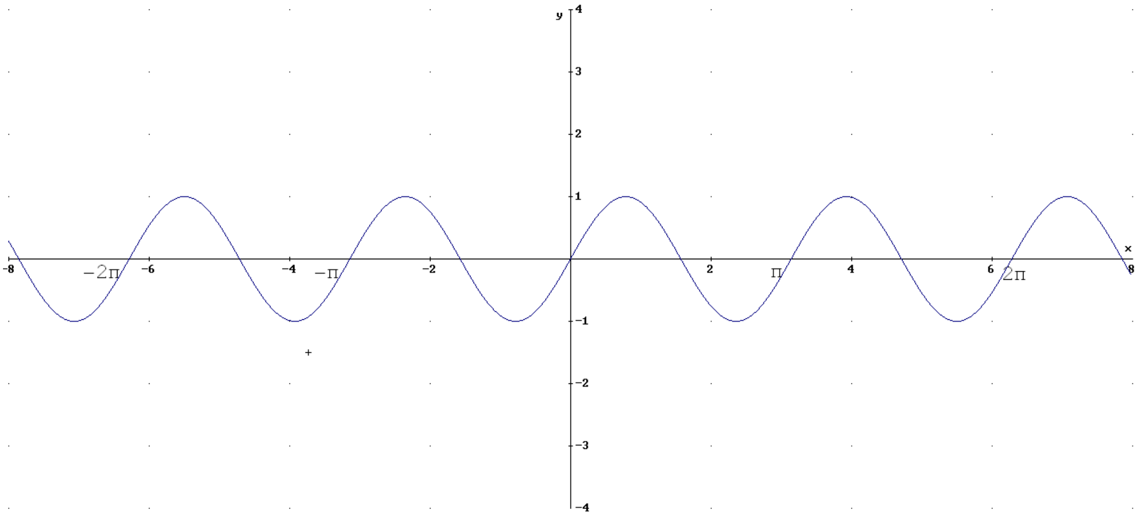
Ejercicio: representar las siguientes funciones, a partir de las funciones seno y coseno.

a) y=sen(2x)

b) y=2+3cos(x)

c) y=sen(x/2+π)

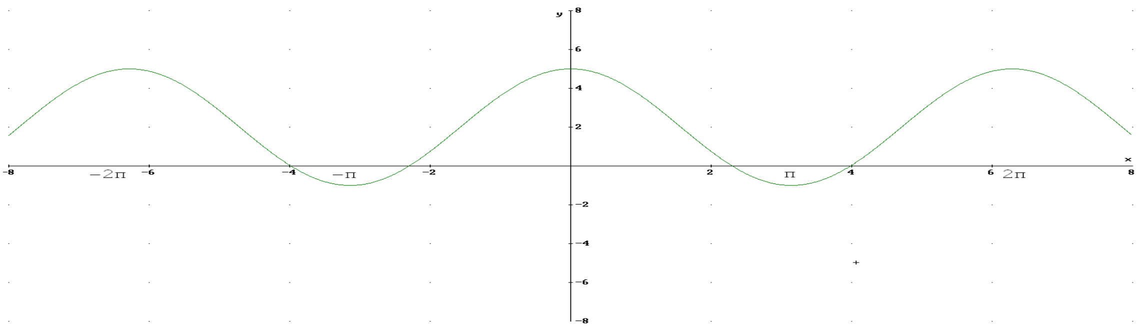
a) La función y=sen(2x) es igual que la función y=sen(x), lo único que cambia el periodo. Veamos el periodo de la función → sen(0)=sen(2π) → $x_1=0$, $x_2=\pi$ → T=π-0=π



b) La función y=2+3cos(x) es como la función cos(x) con las siguientes diferencias:

- Desplazada 2 unidades hacia arriba

- La amplitud es 3 unidades en vez de 1.

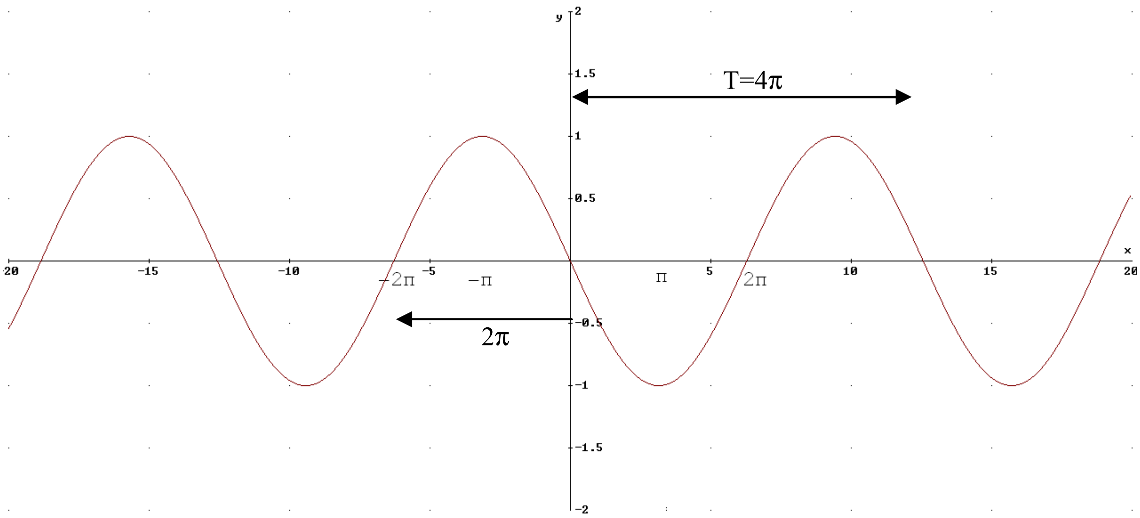


c) La función y=sen(x/2+π) se comporta de forma semejante a sen(x) con las diferencias siguientes:

- el periodo: sen(0)=sen(2π) → $x_1=-2\pi$, $x_2=2\pi$ → T=2π-(-2π)=4π

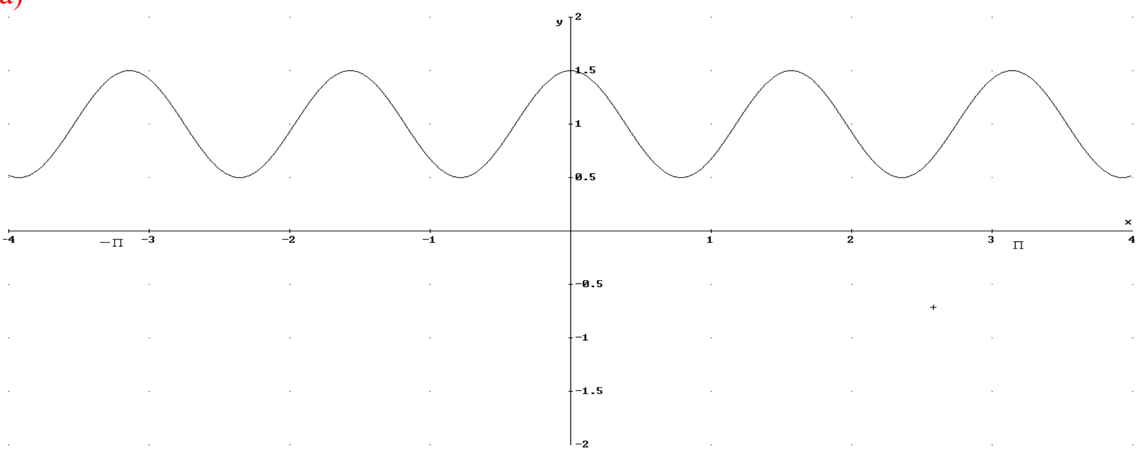
- está desplazada -2π → y=sen(x/2+π)=sen$\left(\frac{1}{2}(x+2\pi)\right)$ hacia la derecha. Como el periodo es 4π, está desplazado medio periodo hacia la izquierda

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)



Ejercicio: obtén la expresión algebraica de las siguientes gráficas:

a)



Periodo(T): entre x=-π, x=π tenemos 4 periodos → T=$\frac{\pi-(-\pi)}{4}=\frac{\pi}{2}$. Luego es 4 veces menor que 2π, lo que implica que el argumento es 4·x.

Amplitud(A): max=1.5, mín=0.5 → A=$\frac{1.5-0.5}{2}=0.5$

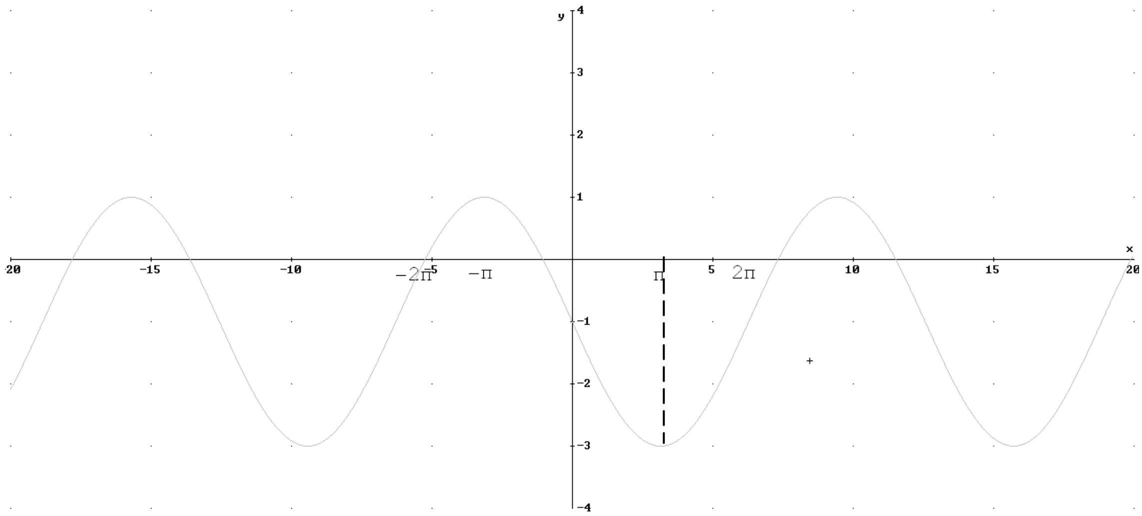
Desplazamiento vertical(y_0): max=y_0+A → y_0=1.

Desplazamiento horizontal (x_0):

- respecto sen(x). Está desplazada -π/4
- respecto cos(x). No está desplazada x_0=0

Expresión analítica: $y=1+0.5\cdot cos(4x)$ o $y=1+0.5\cdot sen(4(x+\pi/4))=1+0.5\cdot sen(4x+\pi)$

b)



Periodo(T): entre x=-2π, x=2π tenemos 1 periodo → T=$\frac{2\pi-(-2\pi)}{1}=4\pi$. Luego es 2 veces mayor que 2π, lo que implica que el argumento es x/2.

Amplitud(A): max=1, mín=-3 → A=$\frac{1-(-3)}{2}=2$

Desplazamiento vertical(y_0): max=y_0+A → y_0=1-2=-1.

Desplazamiento horizontal (x_0):

- respecto sen(x). Está desplazada 2π a la derecha x_0=2π
- respecto cos(x). Está desplazada π a la izquierda x_0=-π

Expresión analítica: y=-1+2·cos((x+π)/2)=-1+2·sen((x-2π)/2)