Tema 8. Cónicas

1. Conceptos previos. Traslación gráficas en los ejes de coordenadas

En este apartado veremos una proposición, que nos permite obtener la ecuación de una función o de una figura cuando desplazamos sus gráficas en los ejes coordenados.

Desplazamiento gráfica en el eje OX: Si desplazamos una gráfica x_0 en el eje OX entonces la ecuación de nuestra nueva gráfica se obtiene sustituyendo x de la ecuación original por $(x-x_0)$.

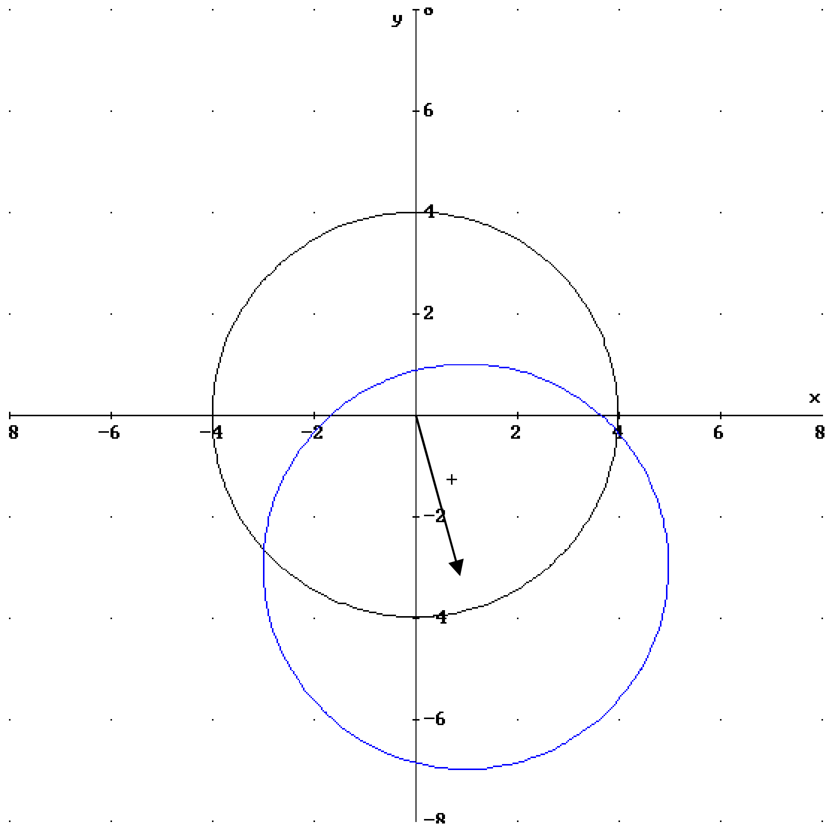
Desplazamiento gráfica en el eje OY: Si desplazamos una gráfica y_0 en el eje OY entonces la ecuación de nuestra nueva gráfica se obtiene sustituyendo y de la ecuación original por $(y-y_0)$

Ejemplos:

1) Si la ecuación de la circunferencia en el origen es $x^2+y^2=r^2$, con r el radio de la misma, encontrar la ecuación de la circunferencia con centro en O(1,-3) y de radio 4.

Hemos desplazado la circunferencia $x^2+y^2=16$ en los ejes, tal que $x_0=1$, e $y_0=-3$. De esta forma la ecuación de la circunferencia será:

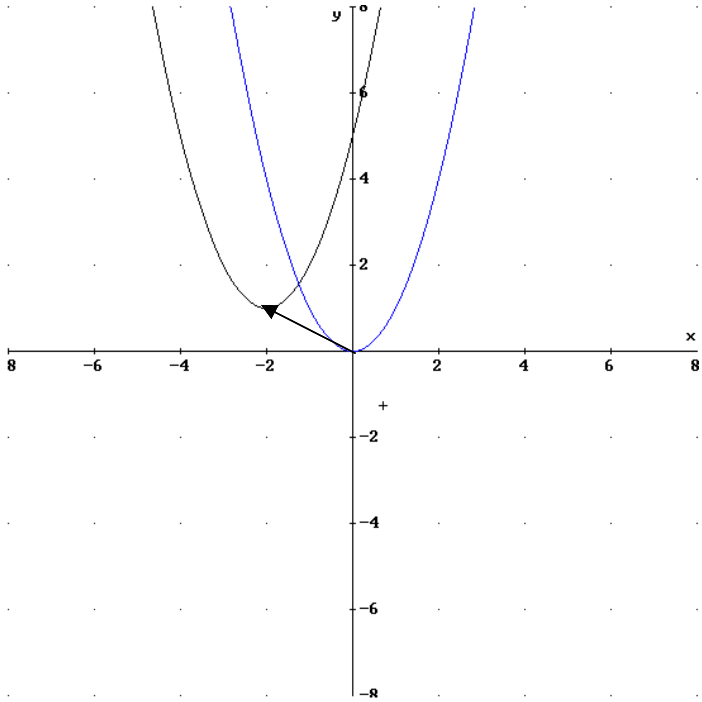
c: $(x-1)^2+(y+3)^2=16 \rightarrow x^2+y^2-2x+6y-6=0$



2) Sea la gráfica $y=f(x)=x^2$, la de una parábola con vértice en el origen. Calcular la ecuación de la parábola con vértice en V(-2,1)

Hemos desplazado la parábola $x_0=-2$, e $y_0=1$. Luego la nueva parábola será:

$y-1=(x+2)^2 \rightarrow y=x^2+4x+5$



2. La circunferencia

2.1. Definición y ecuación de la circunferencia

Definición: la circunferencia es el lugar geométrico de los puntos que distan la misma distancia de otro punto denominado centro de la circunferencia. La distancia de la que distan al centro se llama radio de la circunferencia, r.

Ecuación circunferencia con centro en el origen O(0,0) y radio r: a partir de la definición la ecuación de la circunferencia con centro en el origen es el conjunto de puntos que dista r unidades de O. Es decir, si llamamos P(x,y) a los puntos que forman la circunferencia, estos han de cumplir:

d(c,O)=r → $|\overrightarrow{PO}|$=r → $\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=r$ → elevando al cuadrado obtenemos la relación entre x e y de los puntos de la circunferencia:

$$c: x^2+y^2=r^2$$

Ecuación circunferencia con centro en el O(x_0,y_0) y radio r: A partir de las proposición vistas en el apartado anterior, la ecuación con centro en O(x_0,y_0) y radio r es:

$$c: (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

Date cuenta que esta es la ecuación de todo punto P(x,y) cuya distancia a O(x_0,y_0) es igual a r.

Ejemplo: encontrar la ecuación de la circunferencia con centro en O(1,-3) y de radio 4. Dibujar la circunferencia y encontrar 6 puntos de la misma.

c: $(x-1)^2+(y+3)^2=16 \rightarrow x^2+y^2-2x+6y-6=0$

Los puntos A,B,C,D situados en los "extremos de la circunferencia" se calculan de forma sencilla sin más que sumar o restar el radio a la coordenada x o a la y del centro:

A(1+4,-3) → A(5,-3)

B(1-4,-3) → B(-3,-3)

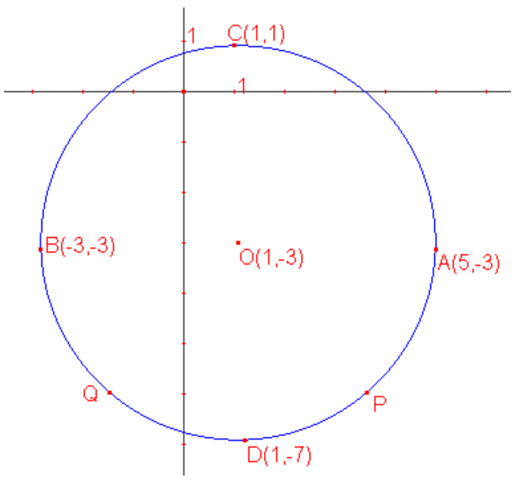
C(1,-3+4) → C(1,1)

D(1,-3-4)→D(1,-7)

Para calcular cualquier otro punto de la circunferencia, basta con dar un valor a la x o a la y (valores comprendidos entre los máximos y mínimos de x e y respectivamente) y despejar la otra coordenada.

Calculemos P y Q con y=-6:

$y=-6 \rightarrow (x-1)^2+9=16 \rightarrow (x-1)^2=7$



$x=1\pm\sqrt{7}$

$P(1+\sqrt{7},-6)$, $Q(1-\sqrt{7},-6)$

Ecuación general de la circunferencia: esta se obtiene desarrollando los cuadrados de la ecuación vista antes. Haciendo esto la ecuación viene dada por la siguiente expresión:

c: $x^2+y^2+Ax+By+C=0$

Identifiquemos los valores de esta ecuación con el centro $O(x_0,y_0)$ y el radio de la circunferencia:

c: $x^2-(2x_0)\cdot x+y^2-(2y_0)\cdot y+(x_0^2+y_0^2-r^2)=0$

$A=-2x_0 \rightarrow x_0=-A/2$

$B=-2y_0 \rightarrow y_0=-B/2$

$C= x_0^2+y_0^2-r^2 \rightarrow r=\sqrt{(x_0^2+y_0^2-C)}$

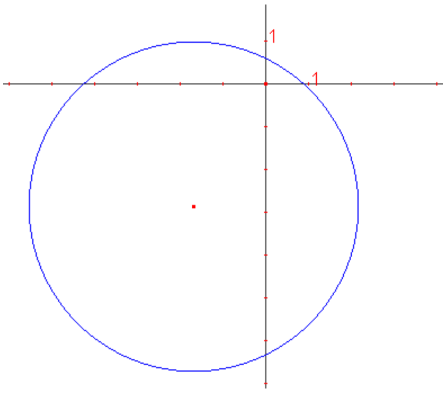
Nota: luego la ecuación de la circunferencia se distingue porque los coeficientes de x^2 e y^2 son los mismos y con mismo signo (sino son 1 dividimos la ecuación por ese valor para que así sean 1). También se tiene que cumplir que $(x_0^2+y_0^2-C)>0$

Ejemplo: dibujar la circunferencia con la ecuación $-2x^2-2y^2-8x-12y+6=0$

Los coeficientes de x^2 e y^2 son los mismo pero no son 1, sino -2. Dividimos la ecuación por -2 y tenemos:

c: $x^2+y^2+4x+6y-3=0$

$x_0=-(4/2)=-2$; $y_0=-6/2=-3$; $r=\sqrt{(-2)^2+(-3)^2+3}=\sqrt{16}=4$



Ejercicio 1: dibujar las siguientes circunferencias y obtener 6 puntos de las mismas.

a) $x^2+y^2-4x+2y+4=0$

b) $2x^2+2y^2+4x-12y+12=0$

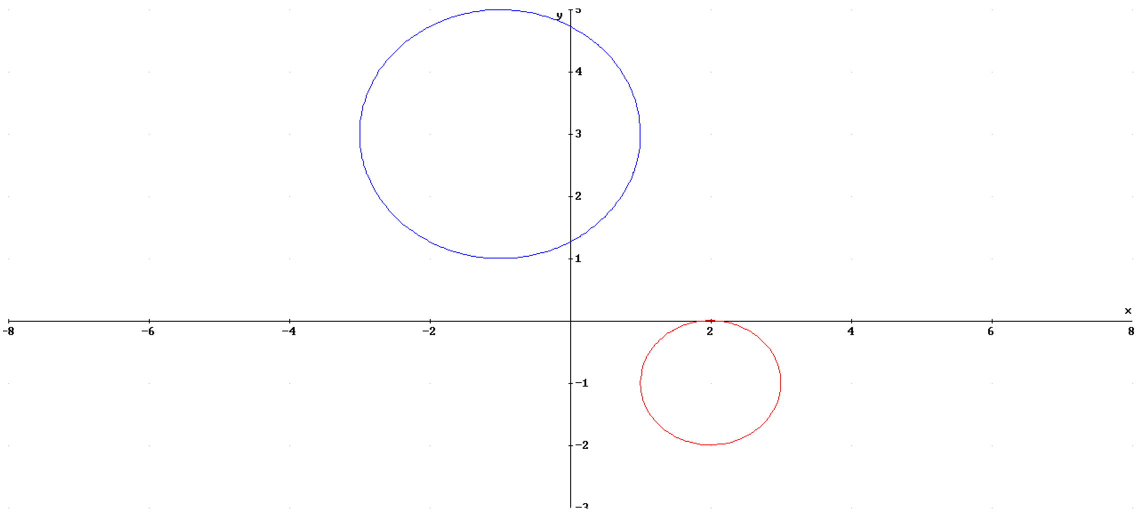
c) $x^2+y^2+2x-6y+14=0$

Solución

a) $(x-2)^2+(y+1)^2=1$

b) $(x+1)^2+(y-3)^2=4$

c) No es una circunferencia, ($x_0^2+y_0^2-C)<0$. Ecuación imposible: $(x-1)^2+(y+3)^2=-4$



Ejercicio 2: calcular la ecuación de la circunferencia concéntrica a c: $x^2+y^2+6x-4y-3=0$ que pase por el punto P(3,-6).

Si es concéntrica es que tiene mismo centro: $x_0=-6/2=-3$, $y_0=4/2=2$.

Para calcular el radio vemos la distancia del centro O(-3,2) al punto P(3,-6):

$r=d(O,P)=\sqrt{(3+3)^2+(-6-2)^2}=10$

c: $(x+3)^2+(y-2)^2=100 \rightarrow$ c: $x^2+y^2+6x-4y-87=0$

Ejercicio 3: calcular la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos A(-1,3), B(4,8), C(7,-1).

Dos métodos:

1) Calculando el circuncentro del triángulo ABC. Hecho en el tema anterior

2) A partir de obtener A,B,C de la ecuación de la circunferencia: $x^2+y^2+Ax+By+C=0$, le obligamos a pasar por los tres puntos y obtendremos un sistema con 3 ecuaciones y 3 incógnitas:

$$\left.\begin{array}{r} A(-1,3)\rightarrow 1+9-A+3B+C=0 \\ B(4,8)\rightarrow 16+64+4A+8B+C=0 \\ C(7,-1)\rightarrow 49+1+7A-B+C=0 \end{array}\right\} \rightarrow A=-8,\ B=-6,\ C=0$$

c: $x^2+y^2-8x-6y=0 \rightarrow$ c:$(x-4)^2+(y-3)^2=5^2$

2.2. Ecuación de la rectas tangentes y normales a la circunferencia.

Definición: la recta tangente a una circunferencia a un punto $P(P_x,P_y)$ es toda recta que sólo toca a la circunferencia en este punto.

Proposición: la recta tangente a la circunferencia es perpendicular la recta que une el centro de la misma con dicho punto. Esta recta se llama recta normal.

Calculo de la recta normal: simplemente hay que calcular la recta que pasa por el punto dado y por el centro de la circunferencia.

Cálculo de la recta tangente: calculamos la pendiente a partir de la pendiente de la recta normal. Conocida la pendiente y el punto de tangencia calculamos la recta.

Ejemplo: calcular la recta tangente y normal en el punto de la circunferencia con x=0 a la circunferencia dada por la siguiente ecuación c: $x^2+y^2-2x+2y+1=0$

Primero calculemos el centro y el radio:

$x_0=1$; $y_0=-1$; r=1. O(1,-1).

Si x=0 $\rightarrow$ $y^2+2y+1=0 \rightarrow y=-1$. Luego el punto de tangencia es P(0,-1)

Normal: $m=\dfrac{-1+1}{0-1}=0 \rightarrow$ r: y=-1

Tangente: m=∞ $\rightarrow$ como pasa por P(0,-1) $\rightarrow$ x=0

Ejercicio 4: Obtener la ecuación de la circunferencia con centro en el origen sabiendo que una de sus rectas tangentes es r: $y=-x+\sqrt{2}$.

Podemos calcular el punto de tangencia si calculamos la intersección de r con la recta normal. Sabemos de la recta normal que pasa por el centro O(0,0) y su pendiente es m=1 (perpendicular a r). Luego es y=x.

La intersección de ambas es $P(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$.

El radio será la distancia entre P y O→ r=d(P,O)=1 →c: $x^2+y^2=1$

Ejercicio 5: calcular las rectas tangentes a la circunferencia con radio 3 y centrada en O(1,-3), sabiendo que la coordenada x de los puntos de tangencia es x=0.

Calculemos primero los puntos de tangencia, para ello necesitamos la ecuación de la circunferencia:

c: $(x-1)^2+(y+3)^2=9$. Si x=0 → $y=-3\pm\sqrt{8}$ → $P(0,-3+\sqrt{8})$, $P'(0,-3-\sqrt{8})$

<u>Recta tangente en $P(0,-3+\sqrt{8})$:</u>

Calculemos la pendiente de la recta normal (que une P con el centro)→ $m=\frac{-3-(-3+\sqrt{8})}{1-0}=-\sqrt{8}$ → Luego como la tangente es perpendicular $m=\frac{1}{\sqrt{8}}$

r: $(y+3-\sqrt{8})=\frac{1}{\sqrt{8}}(x-0)$

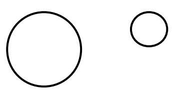
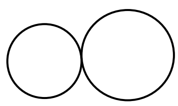
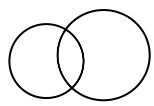
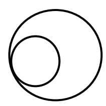
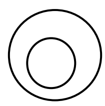
<u>Recta tangente en $P'(0,-3-\sqrt{8})$:</u>

Calculemos la pendiente de la recta normal (que une P con el origen)→ $m=\frac{-3-(-3-\sqrt{8})}{1-0}=\sqrt{8}$ → Luego como la tangente es perpendicular $m=-\frac{1}{\sqrt{8}}$

r: $(y+3+\sqrt{8})=-\frac{1}{\sqrt{8}}(x-0)$

2.3 Posiciones relativas de dos circunferencias

La posición relativa de dos circunferencias pueden ser las siguientes(D es la distancia entre los dos centros).

				
Exteriores	Tangentes exter	Secantes	Tangente int	Interiores
$D>(r_1+r_2)$	$D=r_1+r_2$	$\|r_1-r_2\|<D<r_1+r_2$	$D=\|r_1-r_2\|$	$D<\|r_1-r_2\|$
Ninguna solución	Una solución	Dos soluciones	Una solución	Ninguna solución

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Ejemplo: Calcular la posición relativa entre las siguientes circunferencias:

1) c_1: $(x-1)^2+(y+2)^2=4$ c_2: $x^2+(y-2)^2=1$

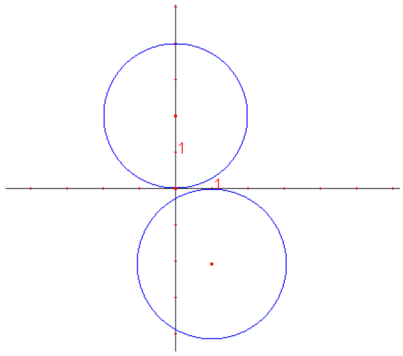
$c_1 \rightarrow O_1(1,-2)$, $r_1=2$

$c_2 \rightarrow O_2(0,2)$, $r_2=1$

$D=d(O_1, O_2)=\sqrt{1+16}=\sqrt{17}$

$\overrightarrow{O_1O_2}=(-1,4)$

$r_1+r_2=3<\sqrt{17} \rightarrow$ exterior



2) c_1:$(x-1)^2+y^2=9$, c_2:$(x+2)^2+(y-1)^2=4$

$c_1 \rightarrow O_1(1,0)$, $r_1=3$

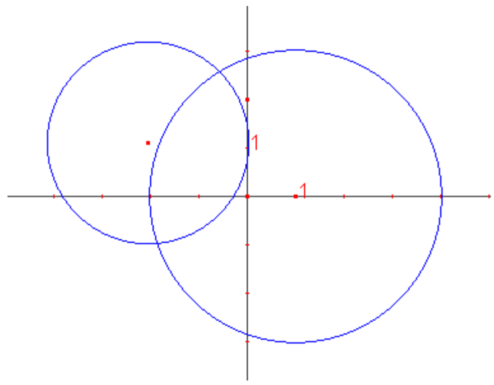
$c_2 \rightarrow O_2(-2,1)$, $r_2=2$

$D=d(O_1, O_2)=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$

$\overrightarrow{O_1O_2}=(-3,1)$

$r_1+r_2=5$; $|r_1-r_2|=1$

$5>\sqrt{10}>1 \rightarrow$ secantes



3) c_1:$(x+1)^2+(y-2)^2=25$; c_2: $x^2+(y-1)^2=4$

$c_1 \rightarrow O_1(-1,2)$, $r_1=5$

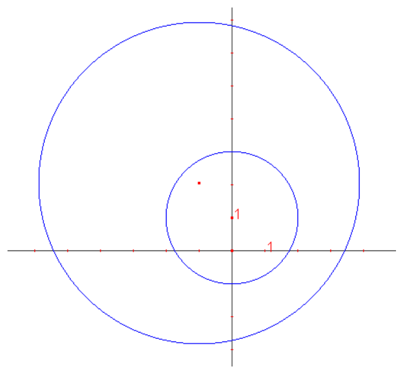
$c_2 \rightarrow O_2(0,1)$, $r_2=2$

$D=d(O_1, O_2)=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$\overrightarrow{O_1O_2}=(1,-1)$

$r_1+r_2=7$; $|r_1-r_2|=3$

$3>\sqrt{2} \rightarrow$ Interior



4) c_1:$(x-3)^2+y^2=1$, c_2:$(x-3)^2+(y+3)^2=4$

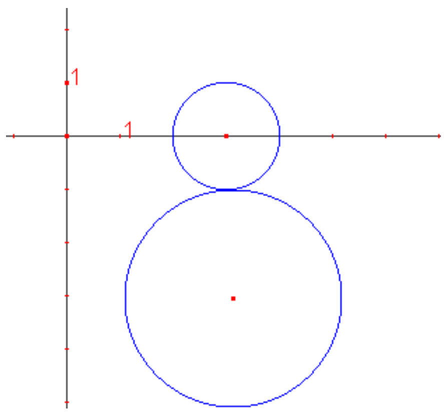
$c_1 \rightarrow O_1(3,0)$, $r_1=1$

$c_2 \rightarrow O_2(3,-3)$, $r_2=2$

$D=d(O_1, O_2)=\sqrt{0+(-3)^2}=3$

$\overrightarrow{O_1O_2}=(0,-3)$

$r_1+r_2=3=D \rightarrow$ Tangente.

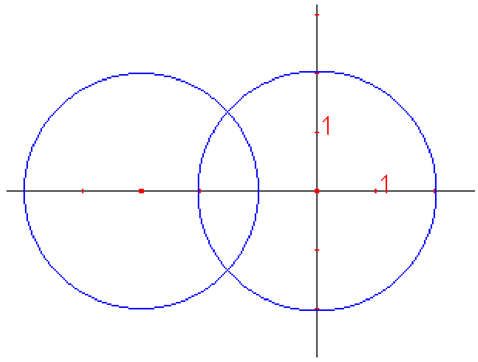


 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Ejercicio 6: calcular los puntos de intersección de las siguientes circunferencias $c_1: x^2+y^2=4$, $c_2: (x+3)^2+y^2=4$

$c_1 \rightarrow O_1(0,0)$, $r_1=2$

$c_2 \rightarrow O_2(-3,0)$, $r_2=2$



$D=d(O_1, O_2)=\sqrt{3^2+0^2}=3$

$\overrightarrow{O_1O_2}=(-3,0)$

$r_1+r_2=4$; $|r_1-r_2|=0$

$4>3>0 \rightarrow$ se cortan

$c_1: x^2+y^2=4$

$c_2: (x+3)^2+y^2=4$

$y^2=4-x^2 \rightarrow (x+3)^2+4-x^2=4 \rightarrow x^2+6x+9+4-x^2-4=0 \rightarrow 6x=-9 \rightarrow x=-3/2$

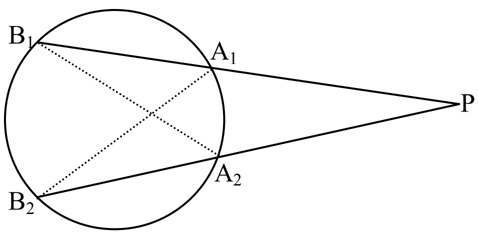
$y^2=4-(9/4) \rightarrow y^2=7/4 \rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{7}}{2} \rightarrow P(-3/2,\frac{\sqrt{7}}{2})$; $P'(-3/2,-\frac{\sqrt{7}}{2})$

2.4. Potencia de una circunferencia. Eje y centro radical

Definición: sea un punto P del plano y una circunferencia c. La potencia de este punto respecto de la circunferencia se denota $Pot_c(P)$ es el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{PA}$, y $\overrightarrow{PB}$, siendo A y B los puntos de corte de cualquier recta que pase por P y corte a la circunferencia.

$$\boxed{Pot_c(P)=\overline{PA}\cdot\overline{PB}}$$

Demostración de la independencia de la potencia con la recta elegida:



Los ángulos $\widehat{B_1}$ y $\widehat{B_2}$ son iguales, pues están inscritos y abarcan el mismo arco $\widehat{A_1A_2}$. Luego los triángulos $\widehat{PB_1A_2}$ y $\widehat{PB_2A_1}$ son semejantes al tener dos ángulos iguales $\widehat{B_1}=\widehat{B_2}$ y $\hat{P}$ es común a ambos. Al ser semejantes sus lados proporcionales:

$$\frac{PB_1}{PB_2}=\frac{PA_2}{PA_1} \rightarrow \overline{PB_1}\cdot\overline{PA_1}=\overline{PB_2}\cdot\overline{PA_2}$$

Calculo de la potencia: existe un método más sencillo de calcular la potencia, consistente en sustituir la x y la y del punto $P(P_x,P_y)$ en la ecuación de la circunferencia

$$\boxed{Pot_c(P)=(P_x-x_0)^2+(P_y-y_0)^2-r^2=A\cdot P_x+B\cdot P_y+C}$$

Casos:

a) $Pot_c(P)>0$ punto exterior a la circunferencia

b) $Pot_c(P)=0$ punto de la circunferencia

c) $Pot_c(P)<0$ punto interior a la circunferencia

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Ejercicio 7: sea la circunferencia c: $x^2+y^2+2x-2y-2=0$, calcular la potencia del punto P(0,0) a partir de los dos métodos y comprobar que el resultado es el mismo. (Nota usa la recta que pasa por P r: y=x). ¿Cuál es la posición relativa de P respecto a c?

a) A partir de la definición de potencia, calculemos los puntos de corte de r con la circunferencia:

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x-2y-2=0 \\ y=x \end{cases} \rightarrow A(1,1),\ B(-1,-1)$$

$\overline{PA}$=(1-0,1-0)=(1,1)

$\overline{PB}$=(-1-0,-1-0)=(-1,-1)

$Pot_c(P)= \overline{PA}\cdot\overline{PB}=-2$

A partir de sustituir en la ecuación de la circunferencia:

$Pot_c(P)=0^2+0^2+2\cdot0-2\cdot0-2=-2$

b) Como $Pot_c(P)<0$ el punto dentro de la circunferencia

Definición: eje radical de dos circunferencias es el lugar geométrico de los puntos que tienen igual potencia respecto de ambas circunferencias. Es una recta.

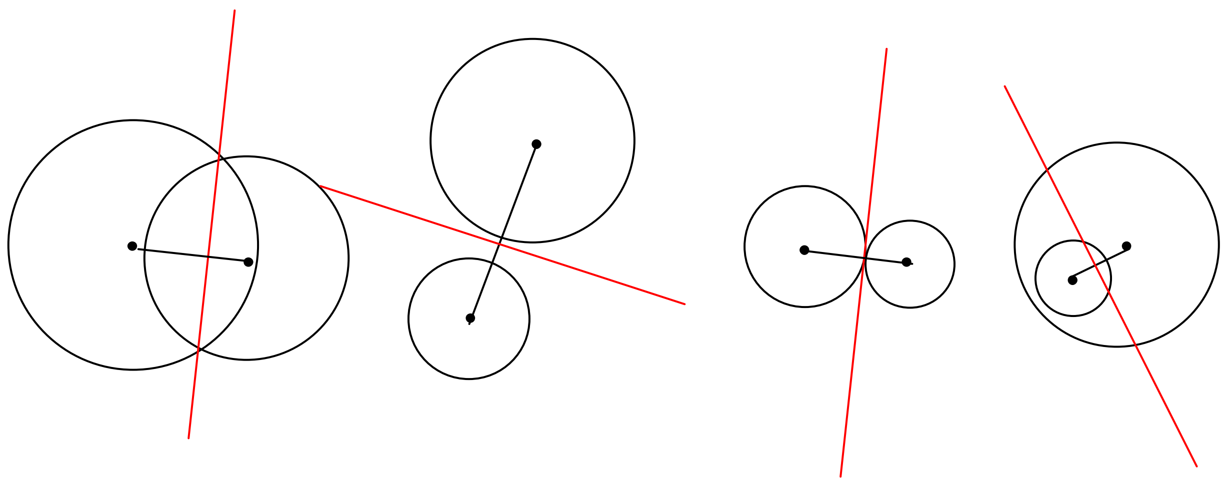
Cálculo de la potencia de dos circunferencias c y c': simplemente aplicando la definición, si los puntos del eje radical tienen de coordenadas r(x,y), entonces cumplen:

c: $x^2+y^2+Ax+By+C=0$

c': $x^2+y^2+A'x+B'y+C'=0$

r: $Pot_c(x,y)=Pot_{c'}(x,y) \rightarrow x^2+y^2+Ax+By+C= x^2+y^2+A'x+B'y+C' \rightarrow$

eje radical r:(A-A')x+(B-B')y+(C-C')=0



Nota: El eje radical es un recta perpendicular al segmento que une los centros de las dos circunferencias. Si las circunferencias son concéntricas no tienen eje radical.

Ejercicio 8: calcular el eje radical de las circunferencias con ecuaciones c:$(x-1)^2+y^2=4$ c':$(x+2)^2+(y-1)^2=9$. Calcular la mediatriz de sus centros y comprobar que es paralela al eje radical

c: $x^2+y^2-2x-3=0$

c': $x^2+y^2+4x-2y-4=0$

Eje radical → $x^2+y^2-2x-3= x^2+y^2+4x-2y-4$ → r: $6x-2y-1=0$

$O_1(1,0)$, $O_2(-2,1)$. Mediatriz M(-0.5, 0.5), $\vec{n}=\overrightarrow{O_1O_2}=(-3,1)$: $-3x+y+C=0$

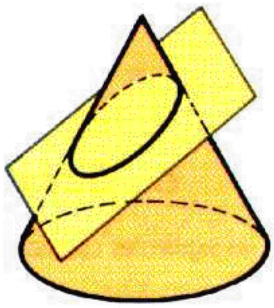
$-3\cdot(-0.5)+0.5+C=0$ → $C=-2$ m:$-3x+y-2=0$

Son paralelas con pendiente m=3

3. Elipse

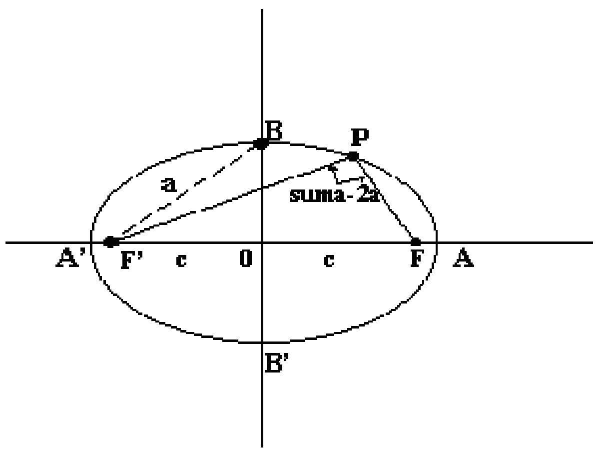
3.1. Definición y elementos

La elipse es la figura geométrica que se obtiene de interceptar un cono con un plano cuyo ángulo con eje es mayor que el que forma dicho eje con la generatriz



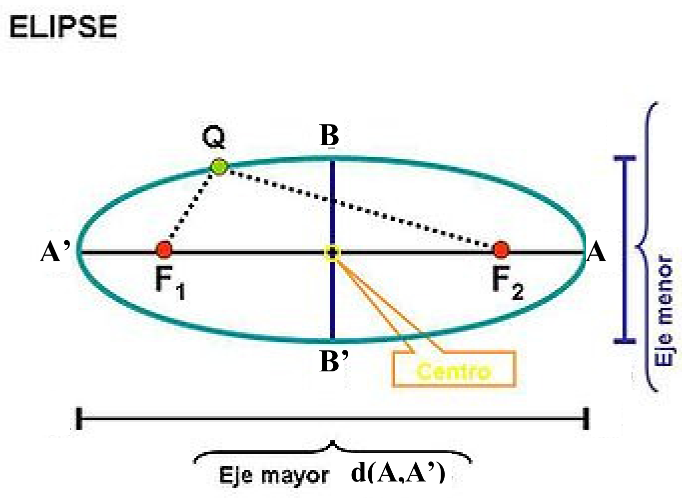
Definición: la elipse es el lugar geométrico de los puntos P(x,y) que cumplen que la suma de las distancias a dos puntos denominados focos de la elipse (F, F') es constante.

$d(P,F)+d(P,F')=K=2\cdot a$, donde $2\cdot a$ es la distancia del eje mayor, es decir d(A,A')



 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Elementos de la elipse:



Focos, los puntos F y F'.

Centro, es el punto O.

Vértices: A, A', B, B'.

Eje mayor: es el segmento AA', cuya distancia se llama 2a

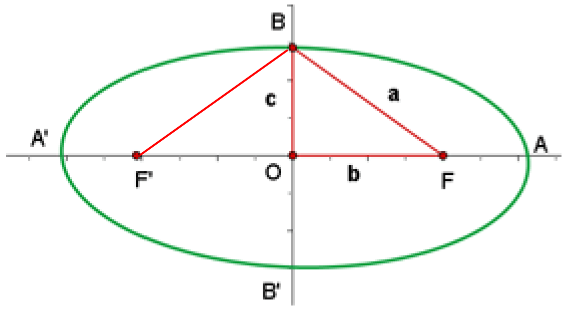
Eje menor: es el segmento BB', cuya distancia se llama 2b

Distancia focal, es la distancia entre los focos, es igual a 2c

Teorema de Pitágoras de la elipse: los valores de a, b y c están relacionados entre si mediante la siguiente expresión:

$$\boxed{a^2=b^2+c^2}$$

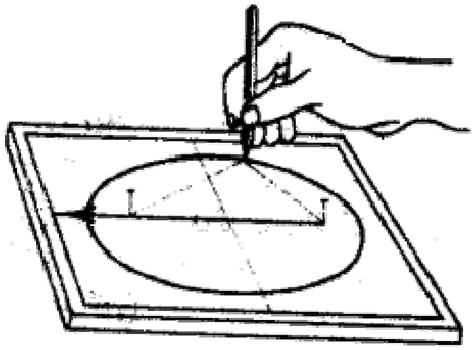
Demostración: aplicamos la definición de la elipse en cualquiera de los puntos B o B':



d(F,B)+d(F',B')=2a → d(F,B)=a

Se forma un triángulo rectángulo donde los catetos valen b y c y la hipotenusa a.

Método del jardinero para construir la elipse: consiste en fijar una cuerda de tamaño 2a en dos puntos, focos de la elipse y distanciados 2c. Con un bolígrafo con la cuerda tensa trazamos la elipse como se ve en el siguiente dibujo:



3.2. Ecuación de la elipse

Aplicando la definición de la elipse y el teorema de Pitágoras para la elipse podemos obtener la ecuación reducida. Por sencillez situemos en centro en el origen O(0,0) y el eje mayor en el eje OX; esta elipse tiene por focos F(c,0) y F'(-c,0). Llamemos P(x,y) a los puntos de la elipse que cumplen:

$$d(F,P)+d(F',P)=2a \rightarrow \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}=2a$$

Ordenando la igualdad y elevando al cuadrado:

$$\left(\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}\right)^2=\left(2a-\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}\right)^2 \rightarrow (x-c)^2+y^2=4a^2+(x+c)^2+y^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

Ordenando la igualdad y volviendo a elevar al cuadrado:

$$-(x-c)^2-y^2+4a^2+(x+c)^2+y^2=4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} \rightarrow 4a^2+4cx=4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$\left(a^2+cx\right)^2=\left(a\sqrt{(x+c)^{2^2}+y^2}\right)^2 \rightarrow a^4+2ca^2x+c^2x^2=a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$$

$$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)\xrightarrow[a^2=b^2+c^2]{}b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

Dividiendo entre $a^2 \cdot b^2$:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

Ecuación de la elipse con eje mayor el horizontal y centro O(0,0)

Cambiando x por y tenemos la ecuación de la elipse centrada en O(0,0) y con eje mayor el vertical:

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1}$$

Ecuación de la elipse con eje mayor el vertical y centro O(0,0)

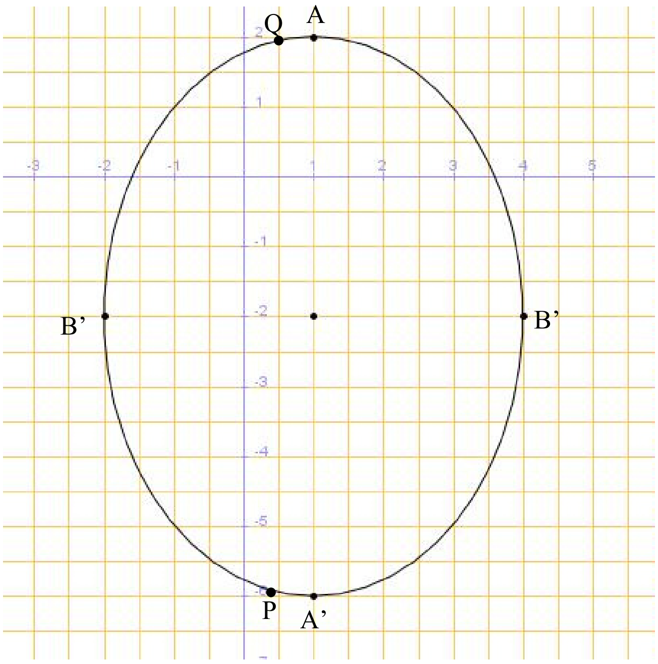
Si desplazamos la elipse x_0 unidades en el eje OX e y_0 en el eje OY, tenemos que el centro de la elipse está en $O(x_0,y_0)$. La ecuación de la elipse consiste en sustituir x por $(x-x_0)$ e y por $(y-y_0)$:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$ ***Elipse con eje mayor el horizontal y centro $O(x_0 y_0)$***

$$\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1$$ ***Elipse con eje mayor el vertical y centro $O(x_0 y_0)$***

Ejemplo: escribir la ecuación reducida de la elipse con centro en O(1,-2) y con eje mayor 4, paralelo al eje OY, y menor 3. Obtener 6 puntos

$$\frac{(x-1)^2}{3^2}+\frac{(y+2)^2}{4^2}=1$$



B(1+3,-2) → B(4,-2)

B’(1-3,-2) → B’(-2,-2)

A(1,-2+4) → A(1,2)

A’(1,-2-4) → A’(1,-6)

Si x=0 → $\frac{(0-1)^2}{3^2}+\frac{(y+2)^2}{4^2}=1$

→ $(y+2)^2=\frac{8\cdot 16}{9}$ → $y=-2\pm\frac{\sqrt{128}}{3}$

$P(0, -2-\frac{\sqrt{128}}{3})$

$Q(0, -2+\frac{\sqrt{128}}{3})$

Ejercicio 9: calcular la ecuación de la elipse si sabemos que F(1,5), F´(1,11), y el eje mayor es 2a=10.

Sabemos que el eje mayor es vertical, pues F y F’ están en la recta x=1.

El centro será el punto medio de F y F’ →O(1,8)

Podemos calcular c: 2c=d(F,F’)=6. → c=3

Por otro lado 2a=10 → a=5.

Aplicando Pitágoras en la elipse $b^2=a^2-c^2$ → b=4

$$\frac{(x-1)^2}{4^2}+\frac{(y-8)^2}{5^2}=1$$

En la circunferencia vimos la ecuación de la misma si operábamos los cuadrados de la ecuación reducida. En la elipse sólo lo haremos si está centrad en el origen:

e: $Ax^2+By^2-C=0$, siendo A>0 ,B>0, C>0 y A≠B(sino es una circunferencia)

Para obtener a y b, sólo tenemos que igualar la parte de x^2 e y^2 a 1 y asociar en la ecuación reducida:

e: $\frac{A}{C}x^2+\frac{B}{C}y^2=1$ e: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ó $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

Luego

- Si $\frac{C}{A}>\frac{C}{B}$ → $\frac{C}{A}=a^2$ y $\frac{C}{B}=b^2$
- Si $\frac{C}{A}<\frac{C}{B}$ → $\frac{C}{A}=b^2$ y $\frac{C}{B}=a^2$.

Ejemplo: Encontrar a y b y decir la orientación de la elipse de ecuación: $2x^2+3y^2=108$.

Dividiendo por 108: $\frac{x^2}{54}+\frac{y^2}{36}=1$ → a=$\sqrt{54}$, b=6. El eje mayor es el horizontal.

3.3. Excentricidad de la elipse.

La excentricidad de la elipse mide como de achatada está la elipse. Se define como el cociente de la distancia focal y el eje mayor.

$\boldsymbol{e=\frac{c}{a}}$ Se cumple (como a≥c) que **1>e≥0.**

En el caso que e=0, entonces c=0, es decir los dos focos en el centro y b=a. Tenemos una circunferencia, donde a=b=r.

Las elipses con misma excentricidad son semejantes.

Ejemplo: Decir los valores de a y c si se sabe que e=0,5 y b=10.

$$\begin{cases} 0,5=\dfrac{c}{a} \\ a^2=10^2+c^2 \end{cases} \rightarrow 4c^2=100+c^2 \rightarrow c=10\sqrt{\frac{1}{3}} \rightarrow a=20\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}$$

Ejercicio 10: calcular la ecuación de la elipse con e=0,6 y eje menor situado con vértices B(1,5), B'(1,-1).

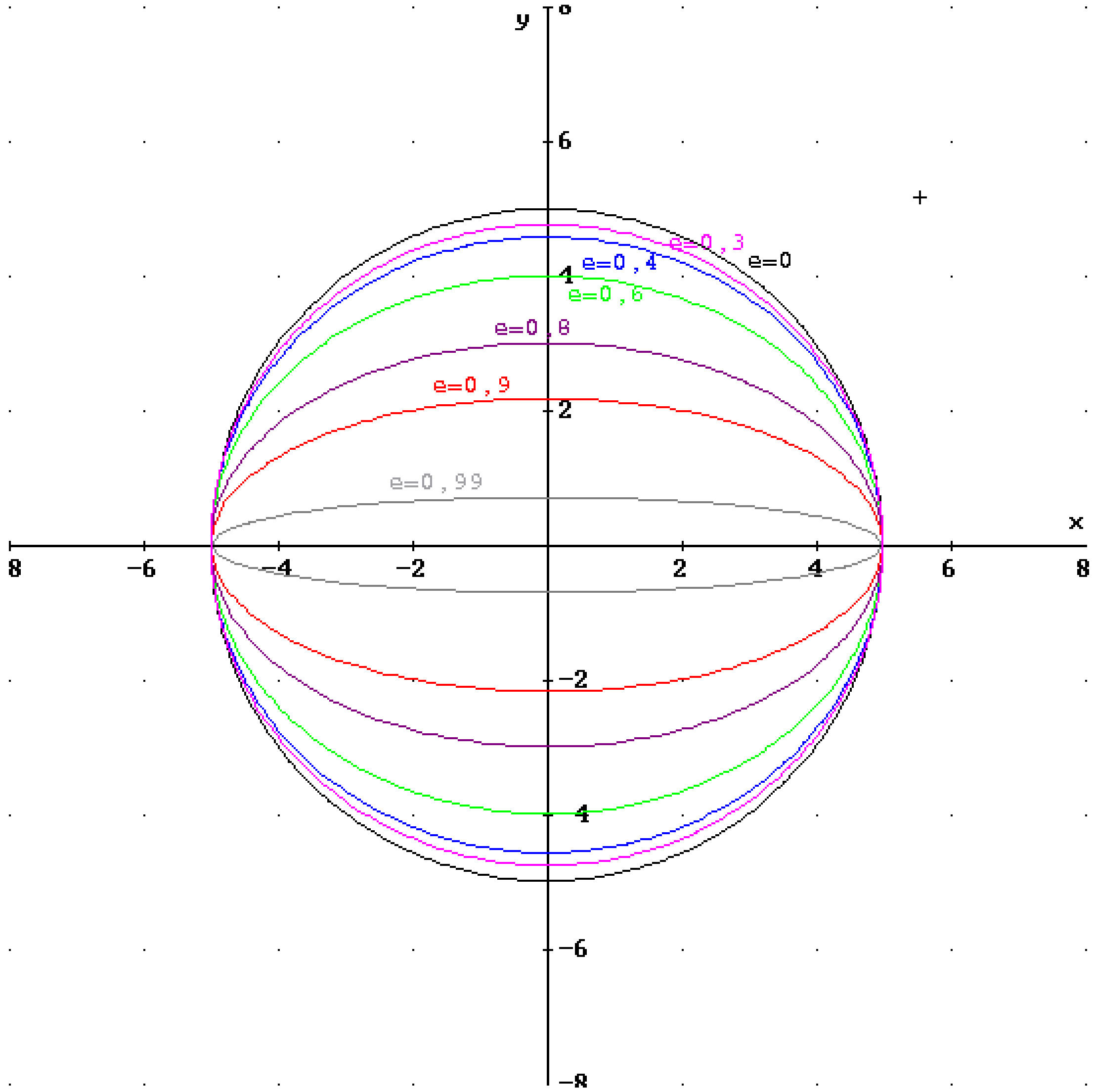
2b=d(B,B')=6→ b=3. Eje menor paralelo eje OY

O=Medio(B,B')=(1,2)

$$\begin{cases} 0,6=\dfrac{c}{a} \\ a^2=3^2+c^2 \end{cases} \rightarrow a^2=9+0,36a^2 \rightarrow a=3,75$$

$$\frac{(x-1)^2}{3,75^2}+\frac{(y-2)^2}{3^2}=1$$

Excentrincidad de la elipse



3.4. Ecuación de la elipse desarrollada:

La ecuación de la elipse desarrollando los cuadrados es de la forma $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$, cumpliéndose:

a) A y B mismo signo
b) $A\neq B$ (si A=B es una circunferencia).

Pasos para determinar el centro $O(x_0,y_0)$ y los ejes a y b:

1) Agrupar x^2 con x con el factor de x^2; lo mismo y^2 con y con coeficiente de y^2
2) Buscar cuadrados perfectos y restar el término independiente, de los cuadrados.
3) Dividir el término independiente para que esté la parte de x e y igualadas a 1.
4) Identificar términos:

Ejemplo: dibujar la siguiente cónica $10x^2+4y^2+40x+8y+4=0$

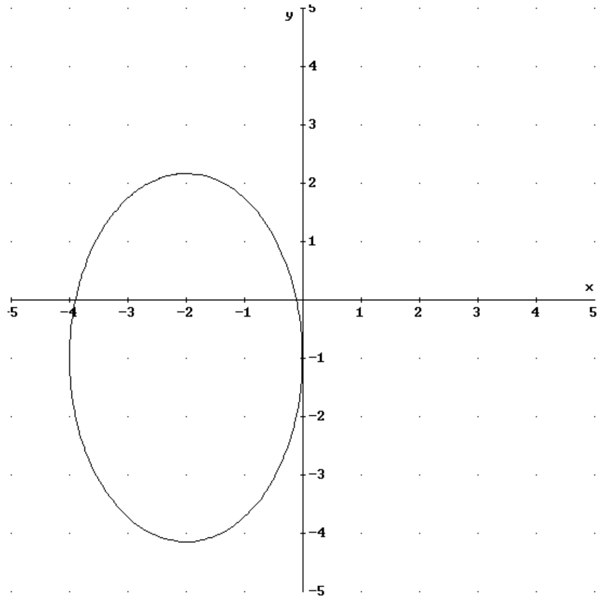
Es una elipse pues $10\neq4$ y mismo signo

1) $10\cdot(x^2+4x)+4\cdot(y^2+2y)+4=0$

2) $10\cdot(x+2)^2-10\cdot4+4\cdot(y+1)^2-4\cdot1+4=0 \rightarrow\ 10\cdot(x+2)^2+4\cdot(y+1)^2=40$

3) $\dfrac{10(x+2)^2}{40}+\dfrac{4\cdot(y+1)^2}{40}=1 \rightarrow \dfrac{(x+2)^2}{4}+\dfrac{(y+1)^2}{10}=1$

4) $a=\sqrt{10}$, $b=2$, $O(-2,-1)$. Eje mayor paralelo al eje OY.



Ejercicio 11: dibujar e identificar la cónica de ecuación $20x^2+36y^2-20x+216y+149=0$

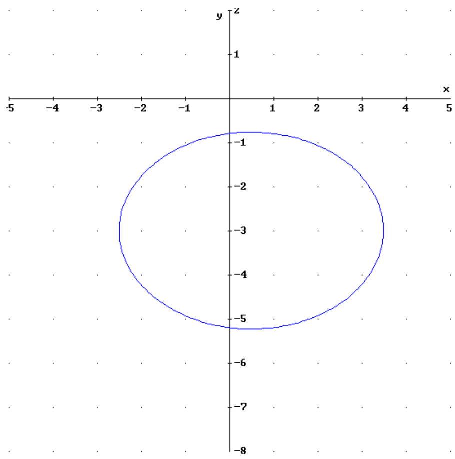
Es una elipse pues $20\neq36$ y mismo signo

1) $20\cdot(x^2-x)+36\cdot(y^2+6y)+149=0$

2) $20\cdot(x-1/2)^2-20\cdot1/4+36(y+3)^2-36\cdot9+149=0 \rightarrow 20\cdot(x-1/2)^2+36(y+3)^2=180$

3) $\dfrac{20\cdot(x-\frac{1}{2})^2}{180}+\dfrac{36\cdot(y+3)^2}{180}=1 \rightarrow \dfrac{(x-\frac{1}{2})^2}{9}+\dfrac{(y+3)^2}{5}=1$

4) $a=3$, $b=\sqrt{5}$, $O(1/2,-3)$. Eje mayor paralelo al eje OX

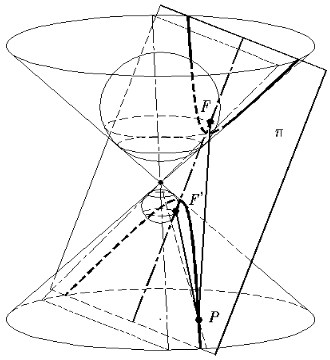


 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

4. Hipérbola

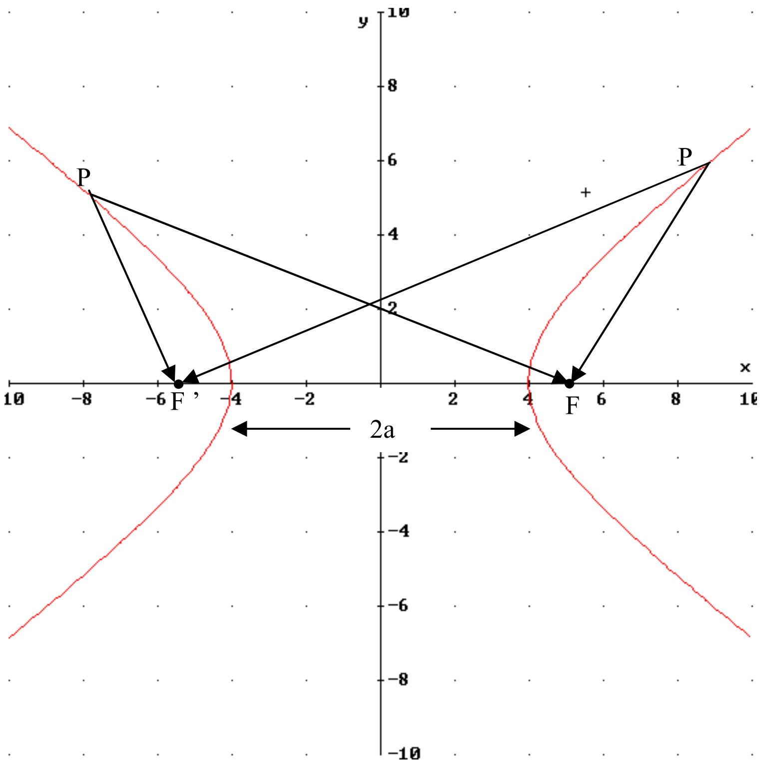
4.1. Definición y elementos de la hipérbola

Definición: la hipérbola es la figura geométrica que se obtiene de la intersección de un plano con un cono doble. Cumpliéndose que el plano forma un ángulo con el eje menor que la directriz con el eje.



Definición: la hipérbola es el lugar geométrico de los puntos que cumple que la diferencia de las distancia de los mismo a otros dos puntos, llamado focos de la hipérbola es constante. Si P(x,y) son los puntos de la hipérbola se cumple que:

$$|d(P,F)-d(P,F')|=k=2a$$



Elementos de la hipérbola: los elementos de la hipérbola son:

A, A': vértices reales de la hipérbola

2a=d(A,A')=eje real

F, F': focos de la hipérbola

2c=d(F,F')

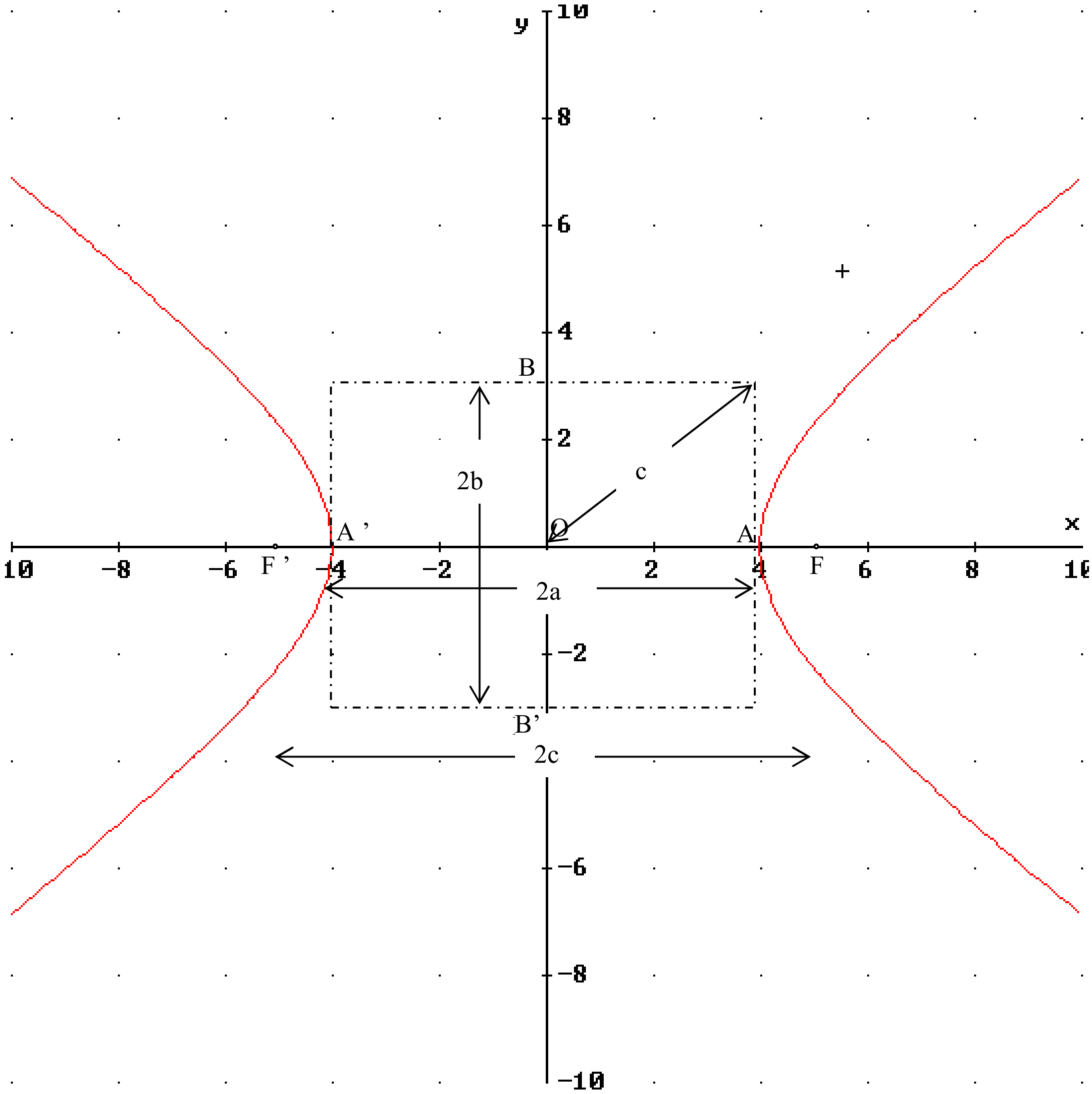
$O(x_0,y_0)$, centro de hipérbola.

B, B'= eje imaginario de la hipérbola

2b=d(B,B')=eje imaginario

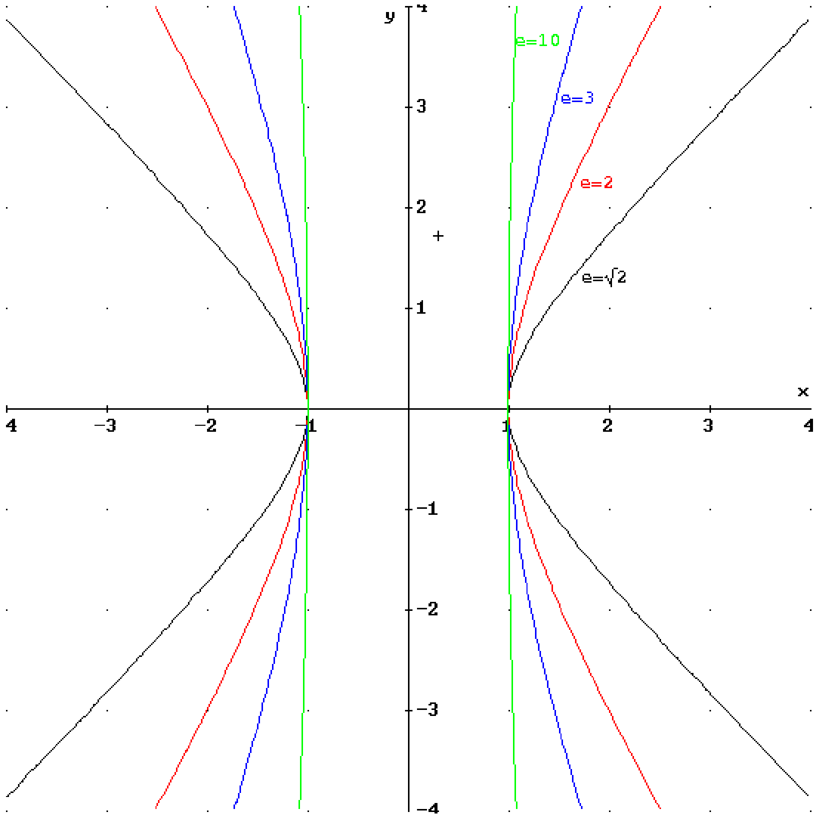
Para situar B y B' se cumple el teorema de Pitágoras de la hipérbola:

$$\boxed{c^2=a^2+b^2}$$



Excentricidad de la hipérbola: es el cociente entre la distancia focal y el eje real: $e=\frac{c}{a}$

La excentricidad de la hipérbola (c>a) cumple e>1



Hipérbola y excentricidad

4.2. Ecuación de la hipérbola

Podemos obtener la ecuación de la hipérbola de forma semejante a la obtenida con la elipse:

1) Focos y eje real en el eje OX, centrada en origen O(0,0):

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$$

2) Focos y eje real en el eje Y,centrada en origen O(0,0), se obtiene cambiando x por y:

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1}$$

3) Focos y eje real paralelo al eje OX y centro en O(x_0,y_0)

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1}$$

4) Focos y eje real paralelo al eje OY y centro en O(x_0,y_0)

$$\boxed{\frac{(y-y_0)^2}{a^2}-\frac{(x-x_0)^2}{b^2}=1}$$

Ejemplos:

a) a=4, b=3 eje real paralelo al eje OY y centro O(-1,3): $\frac{(y-3)^2}{4^2}-\frac{(x+1)^2}{3^2}=1$

b) a=2, c=3 eje real paralelo al eje OX y centro O(-2,-3): b=$\sqrt{5}$ → $\frac{(x+2)^2}{2^2}-\frac{(y+3)^2}{\sqrt{5}^2}=1$

Ejercicio 12: *calcular la ecuación de la hipérbola sabiendo que e=4 y A(1,1) A'(1,9)*

Dibujando los vértices del eje real (A y A') tenemos que el eje real paralelo al eje OY y también podemos calcular el centro y el valor de a:

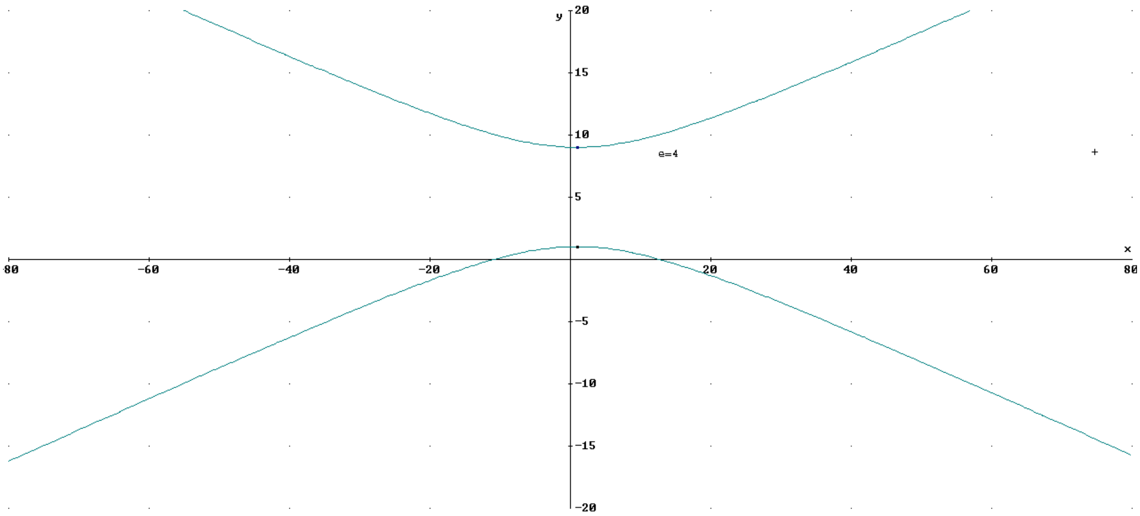
Centro: O($\frac{1+1}{2}$,$\frac{1+9}{2}$) → O(1,5)

2·a=d(A,A')=8 → a=4

Para calcular b, usemos el teorema de Pitágoras de la hipérbola y la excentricidad:

$$\left.\begin{array}{r} 4=\frac{c}{4} \\ c^2=b^2+4^2 \end{array}\right\} \rightarrow c=16,\ b=4\sqrt{15}$$

$$\frac{(y-5)^2}{4^2}-\frac{(x-1)^2}{240}=1$$



Ecuación de la hipérbola desarrollando la expresión: $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$ cumpliéndose A y B distinto signo. Los pasos son los mismos que hemos hecho con la elipse.

Ejemplo: $-7x^2+120y^2+14x-1200y+1313=0$

Si es una hipérbola pues A negativo y B positivo. Pasos

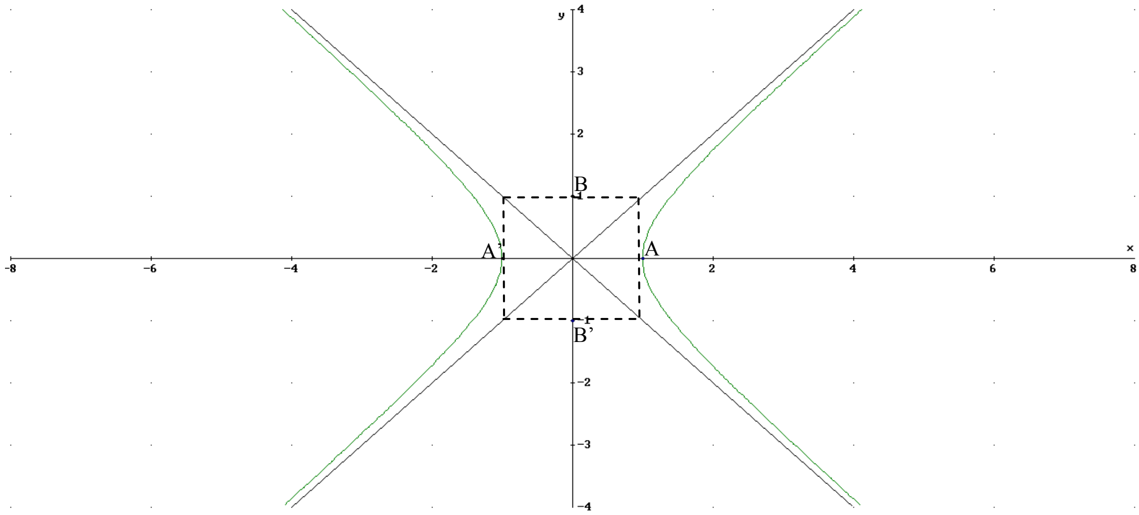
1) $-7(x^2-2x)+120(y^2-10y)+1313=0$

2) $-7(x-1)^2+7+120(y-5)^2-3000+1313=0$ → $-7(x-1)^2+120(y-5)^2=1680$

3) $-\frac{7(x-1)^2}{1680}+\frac{120(y-5)^2}{1680}=1 \rightarrow \frac{(y-5)^2}{16}-\frac{(x-1)^2}{240}=1$

4.3. Asíntotas de la hipérbola

Las asíntotas son rectas a las que se aproxima la gráfica cuando x se hace muy grande y/o muy pequeña. Toda hipérbola tiene dos asíntotas que pasan por el centro de la hipérbola y por los vértices del rectángulo imaginario siguiente:



Asíntotas cuando la hipérbola *centrada en el origen* y el *eje real es el eje OX*:

- Pendiente de la recta: $m = \pm\frac{b}{a}$ (ya que cuando x crece a y crece o decrece b)
- Punto de la recta O(0,0)
- Luego la ecuación de las asíntotas es $y=\pm\frac{b}{a}x$

Asíntotas cuando la hipérbola *centrada en el origen* y el *eje real es el eje OY*:

- Pendiente de la recta: $m = \pm\frac{a}{b}$ (ya que cuando x crece b y crece o decrece a)
- Punto de la recta O(0,0)
- Luego la ecuación de las asíntotas es $y=\pm\frac{a}{b}x$

Si la hipérbola *centrada en el punto $O(x_0,y_0)$* entonces las ecuaciones son:

- Si eje real paralelo al eje OX → $y=y_0\pm\frac{b}{a}(x-x_0)$
- Si eje real paralelo al eje OY → $y=y_0\pm\frac{a}{b}(x-x_0)$

Ejercicio13: calcular la ecuación de las asíntotas de la hipérbola $\frac{(y-1)^2}{8}-\frac{(x+3)^2}{2}=2$

La hipérbola tiene el eje real paralelo al eje OY y el centro es O(-3,1). A la hora de calcular los valores de a y b, hay que tener cuidado pues la hipérbola igualdad a 2. Hay que dividir los dos lados de la igualdad entre 2: $\frac{(y-1)^2}{2\cdot 8}-\frac{(x+3)^2}{2\cdot 2}=1$→ $a^2=16$, $b^2=4$.

Luego O(-3,1), a=4, b=2 y eje real paralelo a eje OY → $y=1\pm 2\,(x+3)$

Ejercicio 14: Hallar los focos, los semiejes, la excentricidad y asíntotas de las hipérbolas siguientes:

a) $\frac{(x+3)^2}{36}-\frac{(y-3)^2}{64}=1$

b) $4x^2-y^2=9$

c) $4y^2-x^2=4$

a) Es la expresión de la hipérbola con eje real paralelo al eje OX con centro en O(-3,3), a=6, b=8. Luego c=$\sqrt{64+36}$=10, y e=$\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$. Las asíntotas son y=3$\pm\frac{8}{6}$(x+3)

b) $4x^2-y^2=9$ → $\frac{4x^2}{9}-\frac{y^2}{9}=1$ → $\frac{x^2}{9/4}-\frac{y^2}{9}=1$

Es la expresión de la hipérbola con eje real paralelo al eje OX con centro en O(0,0), a=3/2, b=3. Luego c=$\sqrt{9/4+9}$=$\frac{3\sqrt{5}}{2}$, y e=$\sqrt{5}$. Las asíntotas son y=$\pm 2x$

c) $4y^2-x^2=4$ → $\frac{4y^2}{4}-\frac{x^2}{4}=1$→ $\frac{y^2}{1}-\frac{x^2}{4}=1$

Es la expresión de la hipérbola con eje real paralelo al eje OY con centro en O(0,0), a=1, b=2. Luego c=$\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$, y e=$\frac{\sqrt{5}}{1}=\sqrt{5}$. Las asíntotas son y=$\pm\frac{1}{2}$x

Ejercicio 15: Hallar las ecuaciones de las hipérbolas con centro en el origen y focos en el eje OX y que cumple:

a) Tiene un vértice en (6,0) y una asíntota es 4x-3y=0

b) Pasa por los puntos (3,0) y (5,-3)

c) Pasa por el punto $(12\sqrt{2},5)$ y su distancia focal es 26 unidades

d) Pasa por el punto P(-10,4) y su excentricidad es de $\sqrt{5}/2$

La ecuación de todas ellas es $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, y por tanto tenemos que calcular a y b

a) El vértice que nos dan es A(6,0). Luego a=d(O,A)=6. La ecuación de la asíntota de esta hipérbola es y=$\pm\frac{b}{a}x$. Despejando y de la asíntota que nos dan: y=$\frac{4}{3}x$. Luego $\frac{4}{3}=\frac{b}{6}$ y por tanto b=8. → $\frac{x^2}{6^2}-\frac{y^2}{8^2}=1$

b) Podemos calcular a y b sustituyendo los valores de x e y de los puntos en la ecuación $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$:

(3,0) → $\frac{3^2}{a^2}-\frac{0^2}{b^2}=1$ → a=3 (era fácil de calcular pues (3,0) era el vértice A)

(5,-3) → $\frac{5^2}{3^2}-\frac{(-3)^2}{b^2}=1$ → b= 9/4 → $\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{(9/4)^2}=1$

c) 2c=26 → c=13, luego F(13,0) y F'(-13,0) . Podemos calcular a aplicando la definición de la hipérbola |d(P,F)-d(P,F')|=2a

d(P,F)=$|\overrightarrow{PF}|\ \sqrt{(13-12\sqrt{2})^2+5^2}=13\sqrt{2}-12$

d(P,F')=$|\overrightarrow{PF'}|\ \sqrt{(-13-12\sqrt{2})^2+5^2}=13\sqrt{2}+12$

|d(P,F)-d(P,F')|=24 → 2a=24 → a=12

Para calcular b apliquemos el teorema de Pitágoras: $b^2=c^2-a^2$ → b=5.

$$\frac{x^2}{12^2}-\frac{y^2}{5^2}=1$$

d) Como no tenemos c no podemos calcular F y F', y no podremos hacer lo mismo que en el apartado anterior. Podemos calcularlo por un sistema:

ecuación 1) P(-10,4)$\in$hipérbola → $\frac{(-10)^2}{a^2}-\frac{4^2}{b^2}=1$

ecuación 2) $e=\frac{c}{a},\ e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2}\rightarrow\frac{5}{4}=\frac{a^2+b^2}{a^2}$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{100}{a^2}-\frac{16}{b^2}=1\\ \frac{5}{4}=\frac{a^2+b^2}{a^2}\end{array}\right\}$$ → a=6, b=3 (hemos descartado las soluciones con a y/o b negativas)

4.4. Hipérbola equilátera. Hipérbola centrada en las asíntotas

Las ***hipérbolas equiláteras*** son las que cumplen que los ejes real e imaginarios son iguales, es decir a=b.

La ecuación de la hipérbola equilátera con centro en O(x_0,y_0) vendrá dada por:

a) Eje real paralelo al eje OX→ $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1$ → $(x-x_0)^2-(y-y_0)^2=a^2$

b) Eje real paralelo al eje OY→ $\frac{(y-y_0)^2}{a^2}-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}=1$ → $(y-y_0)^2-(x-x_0)^2=a^2$

Calculemos la excentricidad de la hipérbola equilátera:

$c^2=a^2+b^2=a^2+a^2=2a^2$ → c=$\sqrt{2}$a → $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}a}{a}=\sqrt{2}$.

Las ecuaciones de las asíntotas se cumple que las pendientes son m=± 1, y por tanto son perpendiculares.

En la ecuación desarrollada es fácil de ver si se trata de una hipérbola equilátera, ya que el factor que multiplica a x^2 e y^2 son iguales pero de distinto signo.

***Ejemplo**:* Calcular la ecuación desarrollada de la hipérbola equilátera con $c=4\sqrt{2}$ y O(1,2) y eje real paralelo al eje OY:

$a=b=c/e=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=4.$ → $\frac{(y-2)^2}{4^2}-\frac{(x-1)^2}{4^2}=1$ → $(y-2)^2-(x-1)^2=16$ → $y^2-x^2+2x-4y-13=0$

Ecuación de la hipérbola equilátera referida a los ejes:

Vamos a ver la ecuación de la hipérbola equilátera cuando las asíntotas son paralelas a los ejes OX y OY.

1) Si el *centro de la hipérbola es O(0,0)* y por tanto las asíntotas son los ejes:

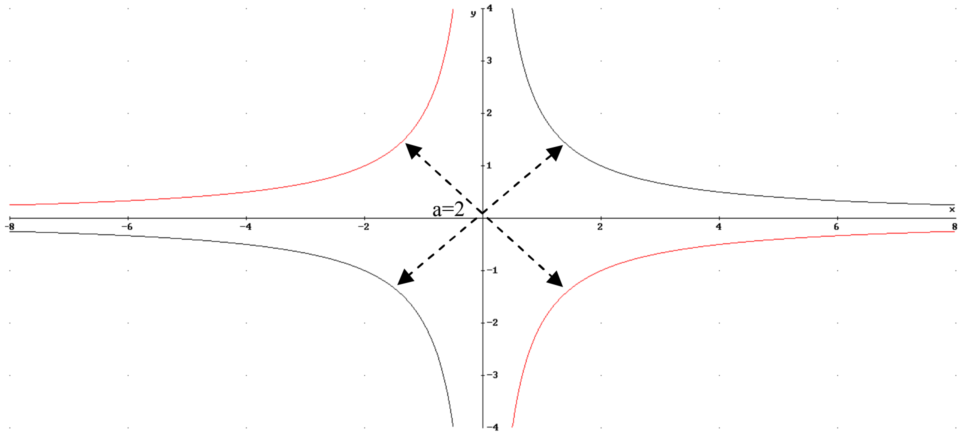
a) $\boxed{y\cdot x=\frac{a^2}{2}}$ → La hipérbola en los cuadrantes I y III

b) $\boxed{y\cdot x=-\frac{a^2}{2}}$ → La hipérbola en los cuadrantes II y IV

Ejemplo a=2 →

a) $y\cdot x=2$

b) $y\cdot x=-2$



1) Si el *centro de la hipérbola es O(x_0,y_0)* y por tanto las asíntotas son $x=x_0$ e $y=y_0$:

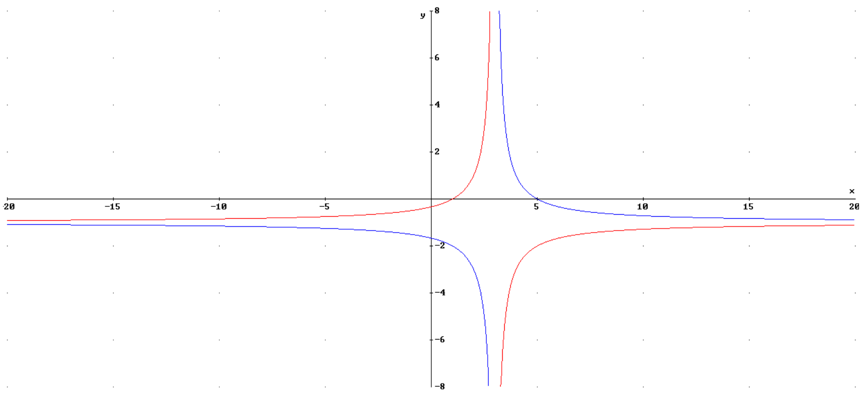
a) $\boxed{(y-y_0)\cdot(x-x_0)=\frac{a^2}{2}}$ → La hipérbola en los cuadrantes I y III

b) $\boxed{(y-y_0)\cdot(x-x_0)=-\frac{a^2}{2}}$ → La hipérbola en los cuadrantes II y IV

Ejemplo a=2 O(3,-1)→

a) $(y+1)\cdot(x-3)=2$

b) $(y+1)\cdot(x-3)=-2$



 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

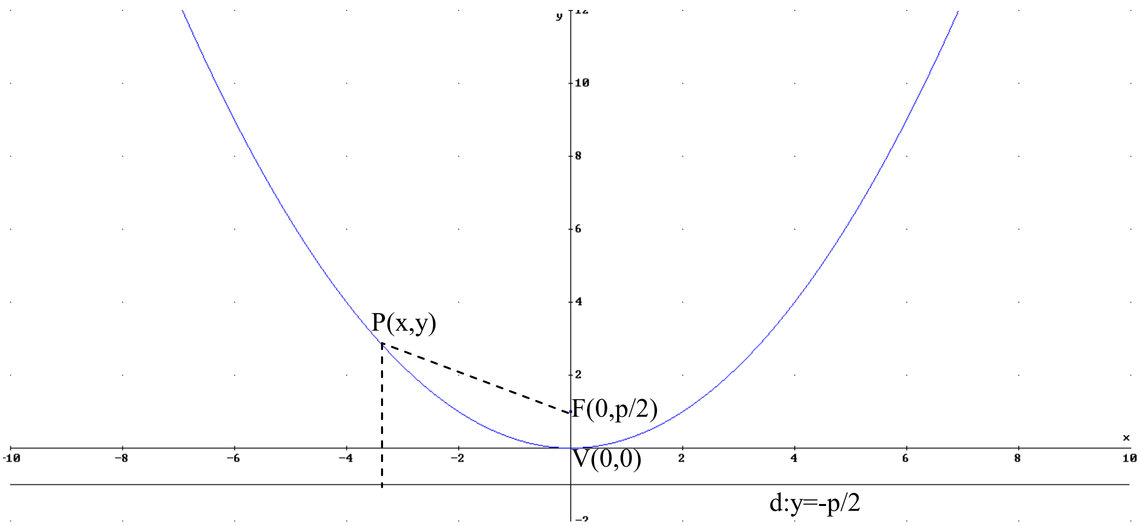
5. Parábola

5.1 Definición y elementos

El año pasado vimos la ecuación de la parábola (como una función) de la forma $y=ax^2+bx+c$. Pero ahora vamos a definir la ecuación de la parábola como lugar geométrico

Definición: la parábola es el lugar geométrico de los puntos P(x,y) del plano que están a igual distancia de un punto denominado foco, F, y una recta denominada directriz, d.

Parábola → d(P,F)=d(P,d)



Vértice de la parábola V, cuya distancia al foco y a la directriz es P/2.

5.2. Ecuación de la parábola

La ecuación de la elipse es según sea la directriz paralela al eje OX o paralela al eje OY de la siguiente forma

1) Vértice de la parábola en (0,0) y directriz paralela al eje OX
    1.1. directriz debajo del eje (y=-p/2) y foco encima F(0,p/2): $\boxed{x^2=2py}$
    1.2. directriz encima del eje (y=p/2) y foco debajo F(0,-p/2): $\boxed{x^2=-2py}$

2) Vértice de la parábola en (0,0) y directriz paralela al eje OY
    1.1. directriz debajo del eje (x=-p/2) y foco encima F(p/2,0): $\boxed{y^2=2px}$
    1.2. directriz encima del eje (x=p/2) y foco debajo F(-p/2,0): $\boxed{y^2=-2px}$

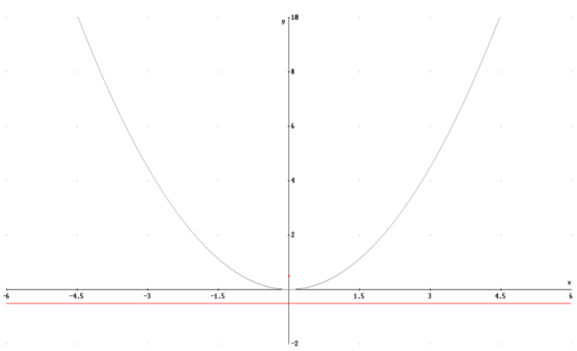
 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

Si el vértice se sitúa en $V(x_0,y_0)$ hay que trasladar la gráfica x_0 unidades en el eje OX e y_0 en el eje OY:

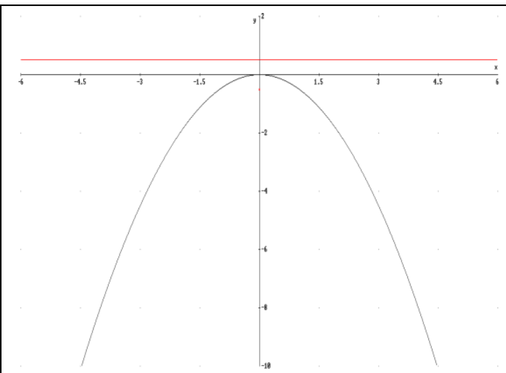
1) Vértice de la parábola en (x_0,y_0) y directriz paralela al eje OX
   1.1. directriz debajo del eje (y=-p/2) y foco encima F(0,p/2): $\boxed{(x-x_0)^2=2p(y-y_0)}$
   1.2. directriz encima del eje (y=p/2) y foco debajo F(0,-p/2): $\boxed{(x-x_0)^2=-2p(y-y_0)}$

2) Vértice de la parábola en (x_0,y_0) y directriz paralela al eje OY
   1.1. directriz debajo del eje (x=-p/2) y foco encima F(p/2,0): $\boxed{(y-y_0)^2=2p(x-x_0)}$
   1.2. directriz encima del eje (x=p/2) y foco debajo F(-p/2,0): $\boxed{(y-y_0)^2=-2p(x-x_0)}$

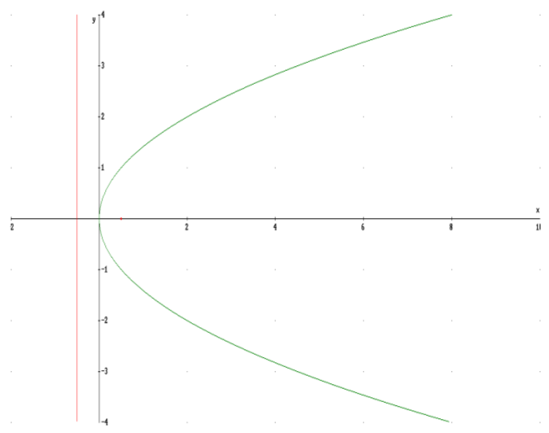
Ejemplo p=1



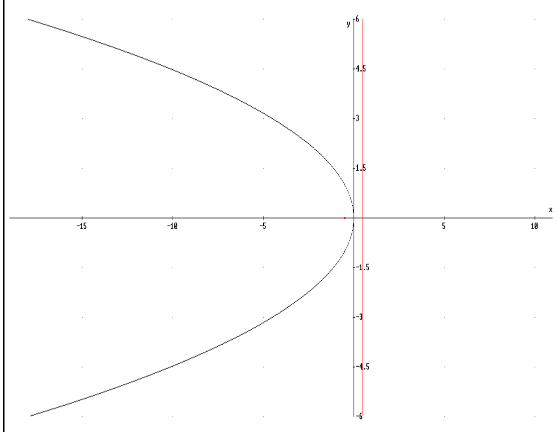
$2y=x^2$



$-2y=x^2$



$2x=y^2$



$-2x=y^2$

Ecuación desarrollado los cuadrados: La ecuación de la parábola se distingue de las demás cónicas porque sólo aparece o bien x^2 o y^2. Los pasos son semejantes a los realizados para la hipérbola y la elipse.

1) Agrupar y^2 con y (si hay y^2) o x^2 con x (si hay x^2) como cuadrado perfecto.

2) Despejar el factor que hemos agrupado

3) Sacar factor común a x (si hemos despejado x) o a y (si hemos despejado x).

Ejemplo: $x^2+4x+6y-2=0$

1) $(x^2+4x)+6y-2=0 \rightarrow (x+2)^2-4+6y-2=0 \rightarrow (x+2)^2-6+6y=0$

2) $(x+2)^2=6-6y$

3) $(x+2)^2=-6(y-1)$. Vértice V(-2,1), p=-3. Directriz: y=3/2+1=5/2, F(-2,1-3/2)=(-2,-1/2)

Ejercicio 16: Hallar la ecuación de la cónica siguiente y los elementos de la misma: $2y-x^2-6x=0$

Es una parábola pues no tiene el término y^2

1) $-(x^2+6x)+2y=0 \rightarrow -(x+3)^2+9+2y=0$

2) $(x+3)^2=2y+9$

3) $(x+3)^2=2(y+9/2)$

V(-3,-9/2)

p=1

directriz: y=-9/2-1/2=-5

Foco F(-3,-9/2+1/2)=(-3,-4)

Ejercicio 17: Hallar el lugar geométrico de los puntos que equidistan del punto (5,4) y la recta x+1=0

Se trata de una parábola, cuya directriz es x=-1 (paralela al eje OY) y el foco F(5,4). La distancia entre la directriz y el foco es p=6.

El vértice estará a distancia 3 de la directriz y del vértice. V(2,4)

Ecuación: $(y-4)^2=+12(x-2)$

El signo + es debido a que el vértice a la derecha de la directriz.

Ejercicio 18: Hallar el lugar geométrico de los puntos que equidistan del punto (0,2) y la recta x-y=0.

Se trata de una parábola, pero ahora la directriz no es paralela a ninguno de los dos ejes. Tendremos que aplicar la definición, sabiendo que la directriz es x-y=0 y F(0,2)

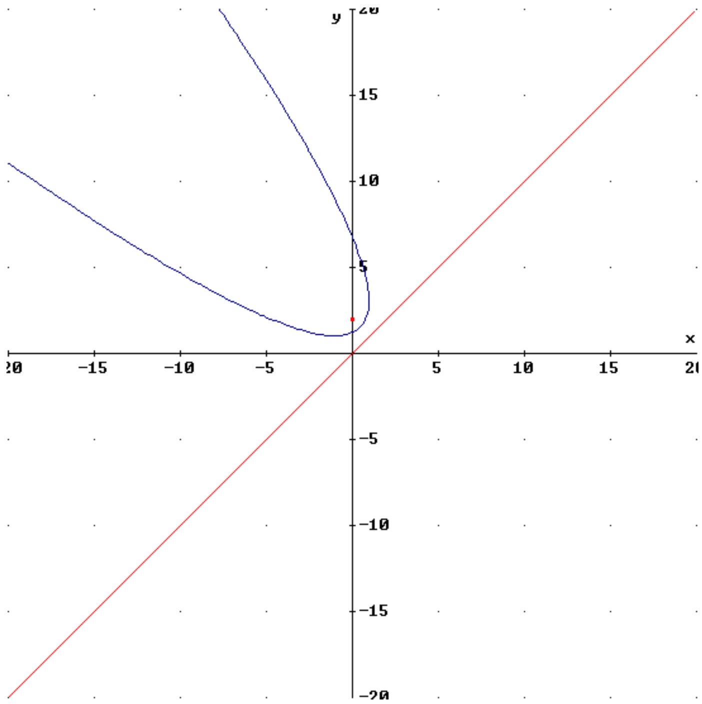
$$d(P(x,y),r:x-y=0)=\frac{|x-y|}{\sqrt{1+1}}=\frac{|x-y|}{\sqrt{2}}$$

 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

d(P(x,y),F(2,2))=$\sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2}$

$\sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2}=\frac{|x-y|}{\sqrt{2}}$ → 2·[(x-0)^2+(y-2)^2]=x^2+y^2-2yx →

2x^2+2y^2-8y+8=x^2+y^2-2yx → x^2+y^2-8y+2xy+8=0



Ejercicio 19: Halla la ecuación de la parábola que cumple

a) F(3,0) y directriz x=-7

b) V(2,3) y directriz x=4

c) Vértice (3,1) y F(5,1)

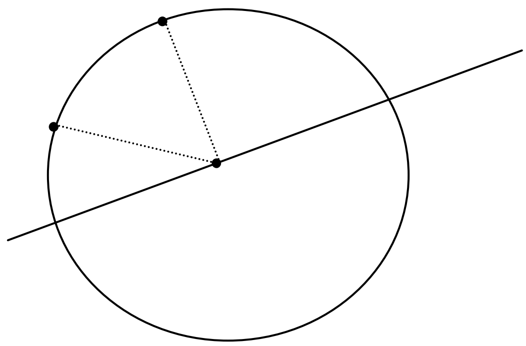
a) d(F,d)=10=p. Vértice V(3-5,0)=(-2,0). Como F a la derecha de la directriz: (y-0)^2=20(x+2)

b) d(V,d)=2=p/2 → p=4 . Como V a la izquierda de la directriz → (y-3)^2=-8(x-2)

c) d(V,F)=2=p/2 → p=4. Como vértice debajo del foco → (x-3)^2=8(y-1)

Ejercicios finales

Ejercicio 20. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por A(-1,0) y B(2,1) y cuyo centro se encuentra en la recta 2x-y-3=0



Se cumple que la distancia de los puntos A y B al centro (situado en la circunferencia) es el mismo. Apliquemos esa condición.

Los puntos de la recta cumplen, despejando "y" de la misma P(x,2x-3), por tanto:

d(A,P)=d(B,P) → $\sqrt{(x+1)^2+(2x-3)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(2x-3-1)^2} \rightarrow$

$x^2+2x+1+4x^2-12x+9=x^2-4x+4+4x^2-16x+16$ → 10x=10 → x=1 → y=-1

C(1,-1)

Para ver el radio sólo tenemos que ver la distancia, es decir sustituir x en una de las dos raíces: d(A,P)=$\sqrt{5}$

Luego la ecuación de la circunferencia: c: $(x-1)^2+(y+1)^2=5$

Ejercicio 21. Identifica las siguientes cónicas, indicando sus parámetros representativos.

a) $6y-x^2-4x=2$

b) $-2x^2-2y^2=-8x$

c) $-x^2+y^2=2x+4$

d) $x^2+4y^2=4y+10$

e) $xy+x+y-1=0$

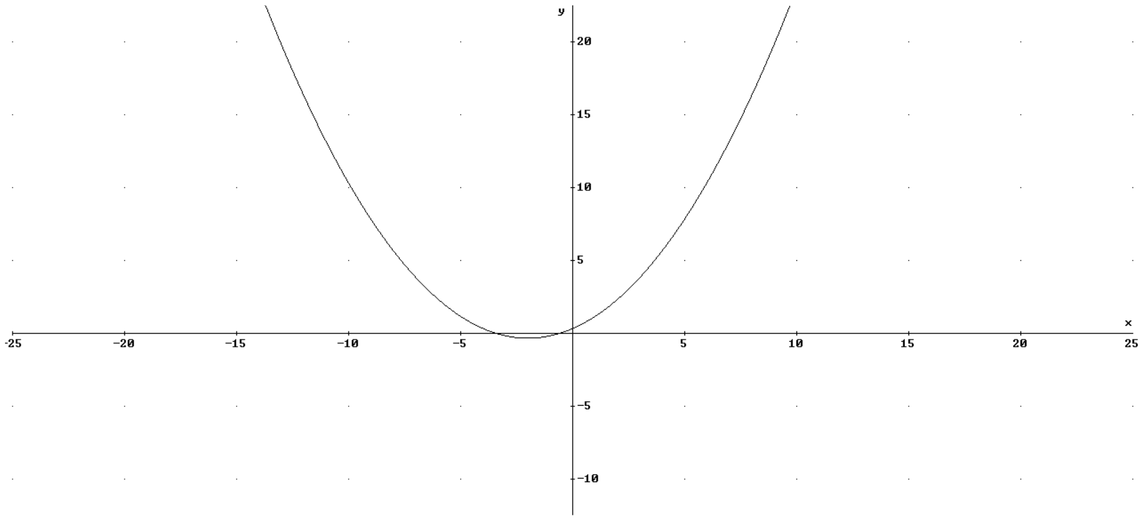
a) Es una parábola, pues no hay término y^2. Veamos la ecuación de dicha parábola:

paso 1)$-(x^2+4x)+6y-2=0 \rightarrow -(x+2)^2+4+6y-2=0$

paso 2) $(x+2)^2=6y+2$

paso 3) $(x+2)^2=6(y+1/3) \rightarrow$ V(-2,-1/3) p=3

Tenemos la parábola



Foco $\rightarrow$ F(-2,-1/3+3/2)=(-2,7/6)

Directriz$\rightarrow$ d: y=-1/3-3/2=-11/6

b) $-2x^2-2y^2=-8x$, es una circunferencia pues los coeficientes de x^2 e y^2 los mismos y de mismo signo. Reescribiendo la ecuación $x^2+y^2-4x=0$

$x_0=-A/2=-4/-2=2$

$y_0=-B/2=0$

Centro O(2,0)

r=$\sqrt{x_0^2+y_0^2-C}=\sqrt{4+0-0}=2$

c: $(x-2)^2+y^2=2^2$

c) $-x^2+y^2=2x+1 \rightarrow$ es una hipérbola equilátera pues x^2e y^2 distinto signo y además de mismo módulo.

Paso1) $y^2-(x^2+2x)=4 \rightarrow y^2-(x+1)^2+1=4$

Paso 2) $y^2-(x+1)^2=3$

Paso3) $\frac{y^2}{3}-\frac{(x+1)^2}{3}=1$

a=b=$\sqrt{3}$. c=$\sqrt{3+3}=\sqrt{6}$. $\rightarrow$e=$\sqrt{2}$

d) $x^2+4y^2=4y+10$ → elipse pues los coeficientes de x^2 e y^2 son de mismo signo pero distintos.

Paso1) $x^2+4(y^2-y)=10$ → $x^2+4(y-1/2)^2-1=10$

Paso2) $x^2+4(y-1/2)^2=11$

Paso 3) $\frac{x^2}{11}+\frac{(y-1/2)^2}{11/4}=1$

$a=\sqrt{11}$, $b=\sqrt{11}/2$ → $c=\sqrt{33}/2$ → $e=\sqrt{3}/2$

Ejercicio 22. Calcular la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya suma de las distancias a los puntos F(0,0) y F'(3,3) es constante igual a 10.

Según la definición se trata de una elipse donde F y F' son los focos y 10 es el eje mayor

2a=10 → a=5

$2c=d(F,F')=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}$

Llamemos P(x,y) al conjunto de puntos de la elipse, que cumplen d(P,F)+d(P,F')=2a

$$d(F,P)=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$d(F',P)=\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}$$

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}=10 \to \sqrt{x^2+y^2}=10-\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}$$

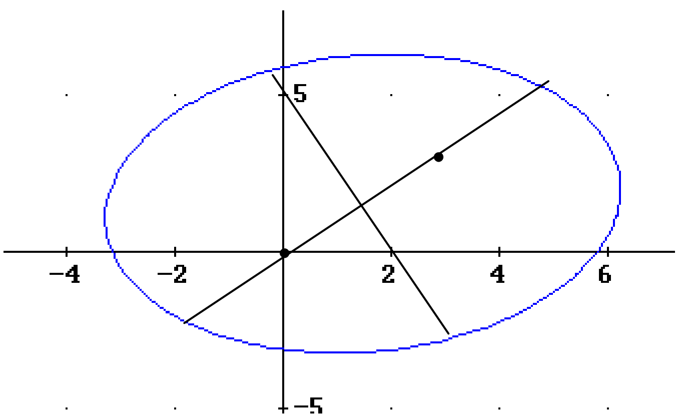
$$\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2=\left(10-\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}\right)^2 \to x^2+y^2=100+(x-3)^2+(y-3)^2-20\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}$$

$$x^2+y^2=100+x^2-6x+9+y^2-6y+9-20\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2} \to$$

$$20\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}=118-6x-6y \to \left(10\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}\right)^2=(59-3x-3y)^2 \to$$

$$100(x^2-6x+9+y^2-6y+9)=9x^2+18xy-354x+9y^2-354y+3481 \to$$

$$91x^2+91y^2-18xy-246x-246y-1681=0$$



Ejercicio 23. Calcular la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de las distancias a los puntos F(0,0) y F'(3,3) es constante igual a 2.

Se trata de una hipérbola en donde 2a=2, y c= $d(F,F')=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

Calculemos la ecuación de la hipérbola aplicando que la diferencia entre las distancias de los puntos P(x,y) de la hipérbola cumple:

$$|d(P,F)-d(P,F')|=2$$

$$d(F,P)=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$d(F',P)=\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}$$

$$d(F,P)-d(F',P)=\left|\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}\right|=2$$

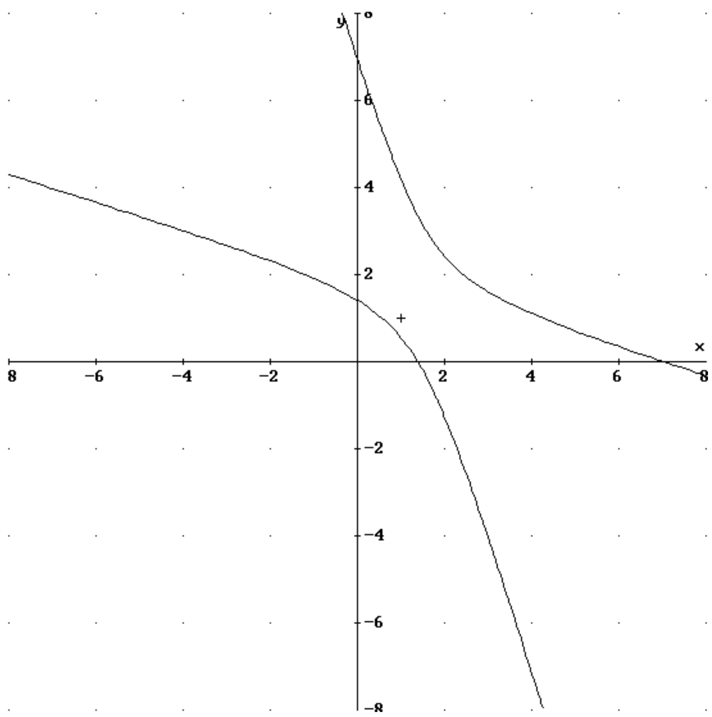
$$\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2=\left(2+\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}\right)^2\rightarrow x^2+y^2=4+(x-3)^2+(y-3)^2+4\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}$$

$$x^2+y^2=4+x^2-6x+9+y^2-6y+9+4\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}\rightarrow 6x+6y-22=4\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2}$$

$$(6x+6y-22)^2=16\left((x-3)^2+(y-3)^2\right)\rightarrow$$

$$36x^2+36y^2+72xy-264x-264y+484=16x^2+16y^2-96x-96y+288$$

$$20x^2+20y^2+72xy-168x-168y+196=0$$



 Tema elaborado por José Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)