<u>2º Bachillerato Análisis</u>

Nota: Todos los problemas valen lo mismo

1. Demostrar que la ecuación $x^2 \cdot e^x = 1$ tiene una única solución en el intevalo [0,1]. Explica razonadamente la demostración y enuncia el teorema que utilices en la demostración.

Existencia de una solución:

Para poder usar Bolzano tendremos que buscar una función igualada a cero. Transformando la ecuación tendremos que es equivalente a $f(x)=x^2 \cdot e^x - 1 = 0$.

Para aplicar Bolzano ha de cumplir dos condiciones:

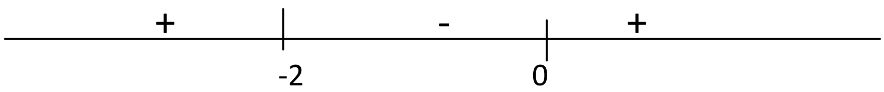
1. Continua en [0.1]: lo es al ser producto de función exponencial y polinómica.
2. $f(0) \cdot f(1) < 0$, veamos esta condición $f(0)=-1<0$, $f(1)=e-1<0$. Se cumple

Al cumplir la dos condiciones anteriormente mencionadas existe al menos un valor $c \in (0,1)$ donde se cumple que $f(c)=0$, y por tanto en $x=c$ se cumple la ecuación $x^2 \cdot e^x = 1$

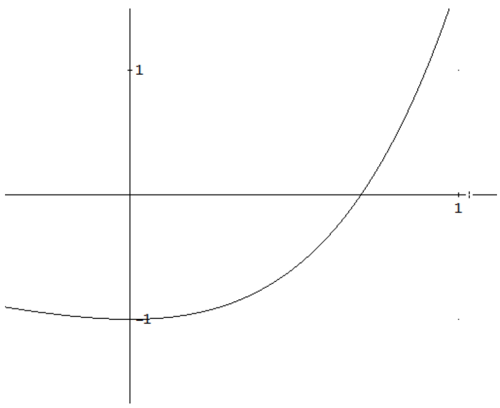
Unicidad de la solución:

Tendremos que ver que entre los puntos (0,-1) y (1,e-1) la función solo crece, para eso estudiemos el signo de $f'(x)=(x^2+2x) \cdot e^x$. Para esto la igualamos a cero, $f'(x)=0 \rightarrow$ cuyas soluciones son $x=0$, $x=-2$.

Signo(f'(x)



Luego en el intervalo (0,1) $f'(x)>0$ y la función sólo crece, por tanto no podrá cortar más que una vez:



2. Dada la función f(x)= $\begin{cases} \dfrac{sen(x^2)}{x} & si \quad x > 0 \\ x^2 - 2x \quad si & x \le 0 \end{cases}$, se pide :

Estudiar la continuidad y la derivabilidad de f(x).

Continuidad:

La función f(x) esta compuesta por dos "trozos": $\dfrac{sen(x^2)}{x}$ y x^2-2x. La primera expresión, $\dfrac{sen(x^2)}{x}$, es continua y derivable en ℝ-{0}, pero en x=0 la función no toma valor en esta expresión. La segunda expresión, x^2-2x, es una función polinómica y por tanto continua y derivable en ℝ. Por esta razón el único punto que presenta problemas de continuidad y derivabilidad es x=0.

Continuidad en x=0:

f(0)=0^2-2·0=0

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{sen(x^2)}{x} = \dfrac{0}{0} \underset{(1)}{=} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{2x\cos(x^2)}{1} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} x^2 - 2x = 0 \end{cases} = 0$$

Como $\lim\limits_{x\to 0} f(x) =$ f(0) función continua en x=0 y por tanto en ℝ

Derivabilidad:

Hagamos la derivada de f(x):

$$\begin{cases} \dfrac{2x^2\cos(x^2) - sen(x^2)}{x^2} & si \quad x > 0 \\ 2x - 2 \quad si \quad x < 0 \end{cases}$$

Para que sea derivable en x=0 ha de cumplir: $\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) =$ -2

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^2\cos(x^2) - sen(x^2)}{x^2} = \frac{0}{0} \underset{(2)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{4x\cos(x^2) - 4x^3 sen(x^2) - 2x\cos(x^2)}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{4\cos(x^2) - 4x^2 sen(x^2) - 2\cos(x^2)}{2} = 1$$

Como ambos límites son diferentes la función no derivable en x=0, y será derivable en ℝ-{0}

(1) Y (2) Aplicamos L'Hopital porque numerador y denominador continuas y derivable en x=0

3. Dada la función f(x)= $\frac{3x^2+24}{x+1}$ estudiar el crecimiento, los puntos relativos, asíntotas y simetría. Representar la función

Dominio: ℝ-{-1}

Simetría f(-x)= $\frac{3(-x)^2+24}{-x+1}=\frac{3x^2+24}{-x+1}\neq \pm f(x)$ no simetría

Asíntota vertical x=-1 $\lim_{x\to -1^-} f(x)=\frac{27}{0}=\begin{cases}\lim_{x\to -1^-}\frac{3x^2 24}{x+1}=\frac{27}{0^-}=-\infty \\ \lim_{x\to -1^-}\frac{3x^2 24}{x+1}=\frac{27}{0^+}=\infty\end{cases}$

Asíntota horizontal:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{3x^2+24}{x+1}=\lim_{x\to -\infty}\frac{3x^2}{x}=\lim_{x\to -\infty}3x=-\infty$$

$$\lim_{x\to \infty}\frac{3x^2+24}{x+1}=\lim_{x\to \infty}\frac{3x^2}{x}=\lim_{x\to \infty}3x=\infty$$

Asíntota oblicua: y=mx+n

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+24}{x^2+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{x^2}=3$$

$$n=\lim_{x\to\infty}f(x)-3x=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x+24}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x}{x}=-3$$

y=3x-3

Monotonía y puntos relativos

$$f'(x)=\frac{6x(x+1)-(3x^2+24)}{(x+1)^2}=\frac{3x^2+6x-24}{(x+1)^2}$$

f'(x)=0 $3x^2+6x-24=0 \rightarrow$ x=-4, x=2

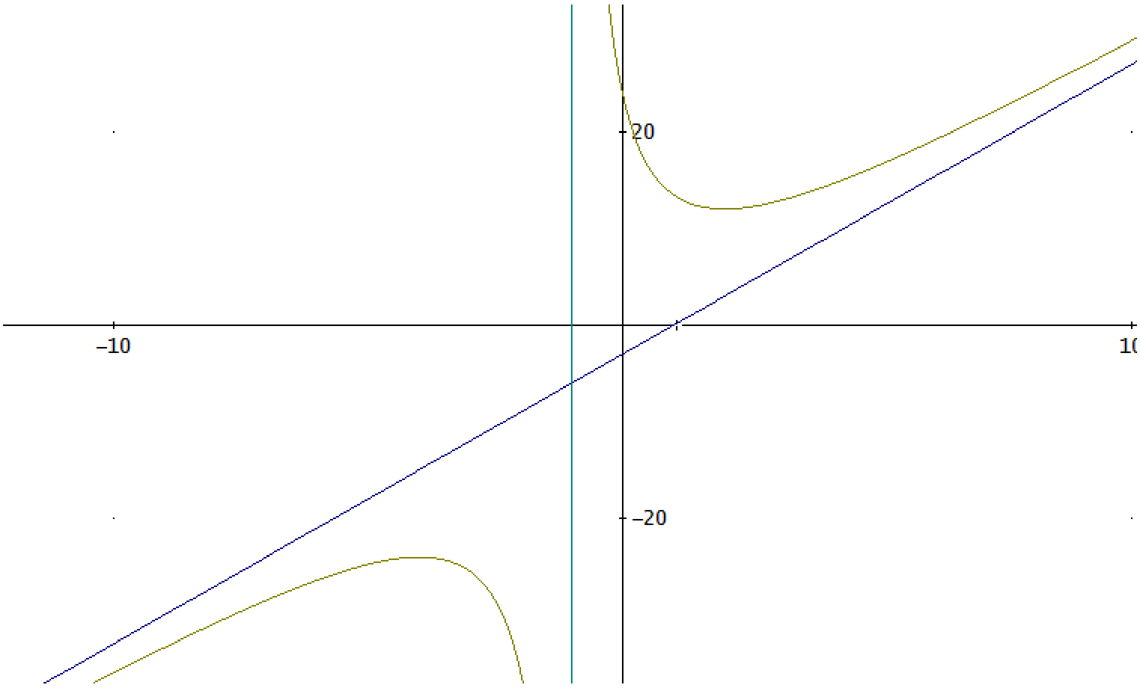
Signo(f'(x)

+		-		-		+
	-4		-1		2	

Crecimiento: $(-\infty,-4)\cup(2,\infty)$

Decrecimiento (-4,2)-{-1}

Maximo M(-4,-24) Mínimo (2,12)



4. a) Calcular el siguiente límite (justifica los pasos) (5 puntos)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{senx}$$

:

b) Calcular la derivadas siguientes: $f(x)=\sqrt{\cos(x)}\cdot 5^{\sqrt{\cos x}}$, g(x)= $\ln\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}-x}$

Solución:

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{sen(x)}=\frac{0}{0}\underset{(1)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}+\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{\cos(x)}=\frac{1}{1}=1$$

(1) Aplicamos L'Hopital porque numerador y denominador continuas y derivable en x=0

b)

$$f'(x)=\frac{-sen(x)}{2\sqrt{\cos(x)}}5^{\sqrt{\cos x}}+\frac{\sqrt{\cos x}}{2\sqrt{\cos x}}(-senx)\ln(5)5^{\sqrt{\cos x}}=-\frac{1}{2}sen(x)5^{\sqrt{\cos x}}\left(\frac{1}{\sqrt{\cos(x)}}+\ln(5)\right)$$

$$g(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)-\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$$

$$g'(x)\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1\right)-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1\right)$$