CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN DE LA PRUEBA: Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones.

Problemas. **Todos ellos valen 2.5 puntos**

1. Calcular el valor de "a" para que el área encerrada por la función $f(x) = \frac{x^2}{a}$ el eje OX y las rectas x=a y x=1 sea mínima. *Nota: a<0, cuidado con el signo de la integral al ser a<0.*

SOLUCIÓN: La parábola con el vértice en (0,0) y como a<0 la parábola situada bajo eje OX. Luego hay que cambiar de signo la integral para que el área sea positiva.

Área=$-\int_a^1 \frac{x^2}{a} dx = -\left[\frac{x^3}{3a}\right]_a^1 = -\left(\frac{1}{3a} - \frac{a^2}{3}\right) u^2$

La función a minimizar es h(a)= $\left(-\frac{1}{3a} + \frac{a^2}{3}\right)$

- h'(a)= $\left(\frac{1}{3a^2} + \frac{2a}{3}\right) = 0 \rightarrow a = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$
- Veamos que es mínima: h''(a)= $\left(\frac{-2}{3a^3} + \frac{2}{3}\right)$. h''($-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$) > 0

Examen realizado por Jose Luis Lorente (lorentejl@gmail.com)

2. Sea la función $f(x)=\frac{x+5/2}{x^2-4}$.

a) Estudiar simetría, asíntotas, monotonía y puntos relativos de la función Esbozar la grafica **(1.5 ptos)**

b) Calcular I=$\int f(x)dx$ **(1 punto)**

SOLUCION

a) Dom(f(x))=R-{-2,2}

Simetría: f(-x)= $\frac{-x+5/2}{x^2-4}$≠f(x) y –f(x). No simetría

Asíntotas:

Vertical: x=2 y x=-2

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{-x+5/2}{(x+2)(x-2)}=\frac{1/2}{4\cdot 0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{-x+5/2}{(x+2)(x-2)}=\frac{1/2}{4\cdot 0^+}=\infty$$

$$\lim_{x\to -2^-} f(x)=\lim_{x\to -2^-}\frac{-x+5/2}{(x+2)(x-2)}=\frac{9/2}{0^-\cdot(-4)}=\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+} f(x)=\lim_{x\to -2^+}\frac{-x+5/2}{(x+2)(x-2)}=\frac{9/2}{0^+\cdot(-4)}=-\infty$$

Horizontal: y=0

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$$

Monotonía y puntos relativos:

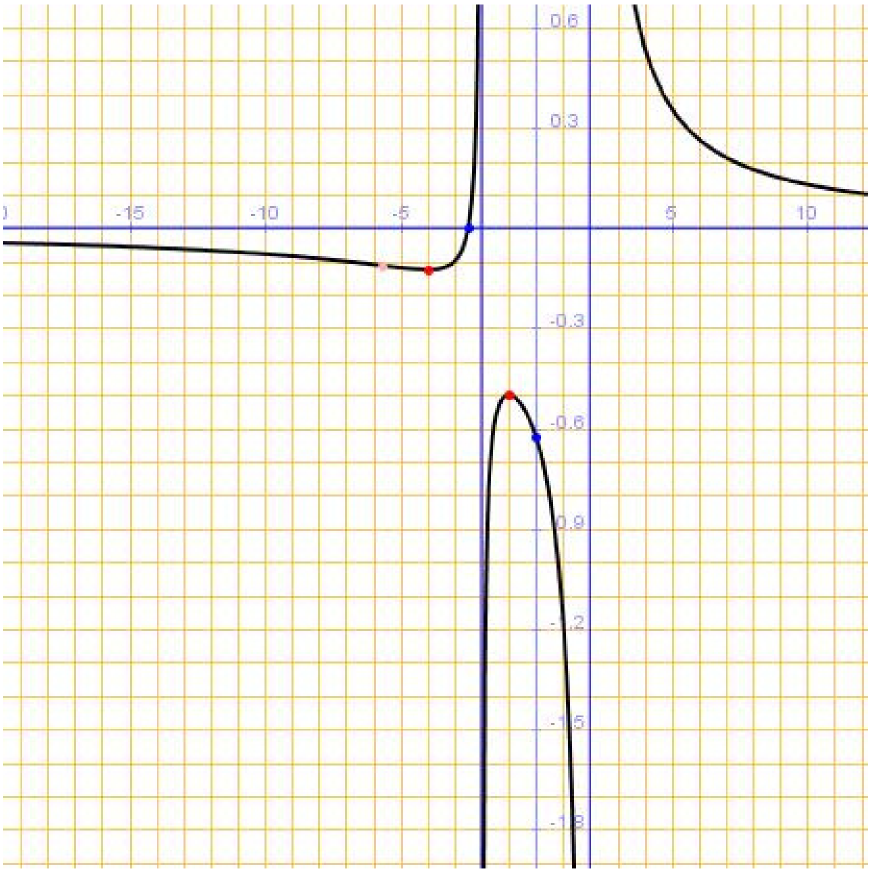
f'(x)= $\frac{(x^2-4)-2x(x+\frac{5}{2})}{(x^2-4)^2}=\frac{-x^2-5x-4}{(x^2-4)^2}=0$ → x={-1,-4}

	(-∞,-4)	-4	(-4,-2)	-2	(-2,-1)	-1	(-1,2)	2	(2,∞)
Sig(f'(x)	-	0	+	No dom	+	0	-	No dom	-
Mon	Decrece	min	Crece		Crece	Max	decrece		decrece

f(x): decrece (-∞,-4)∪(−1,2)∪(2, ∞) y crece (-4,-2)∪(-2,-1)

Máximo: M(-1,-1/2).

Mínimo: m(-4,-1/8)



b) $\int \frac{x+5/2}{x^2-4} dx = \int \frac{A}{x+2} dx + \int \frac{B}{x-2} dx$

Calculemos A y B:

x+5/2=A(x-2)+B(x+2) :

- x=2 → B=9/8
- x=-2 → A=-1/8

$$I = \int \frac{-1/8}{x+2} dx + \int \frac{9/8}{x-2} dx = \frac{1}{8}(-\ln(x+2) + 9\ln(x-2)) + C$$

3. Sea la función $f(x) = e^{-x^2+2x}$.

a) Estudiar simetría, asíntotas, monotonía, puntos relativos, curvatura y puntos de inflexión de la función Esbozar la grafica **(2 ptos)**

b) Demostrar que f(x) se corta con g(x)=x al menos en un punto. **(0.5 puntos)**

SOLUCION

Dom(f(x))=R

Simetría: f(-x)= e^{-x^2-2x} ≠f(x) y –f(x). No simetría

Asíntotas:

Vertical: no tiene

Horizontal: y=0

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = e^{-\infty} = 0$$

Monotonía y puntos relativos: f'(x)=(-2x+2) e^{-x^2+2x}=0 →x=1:

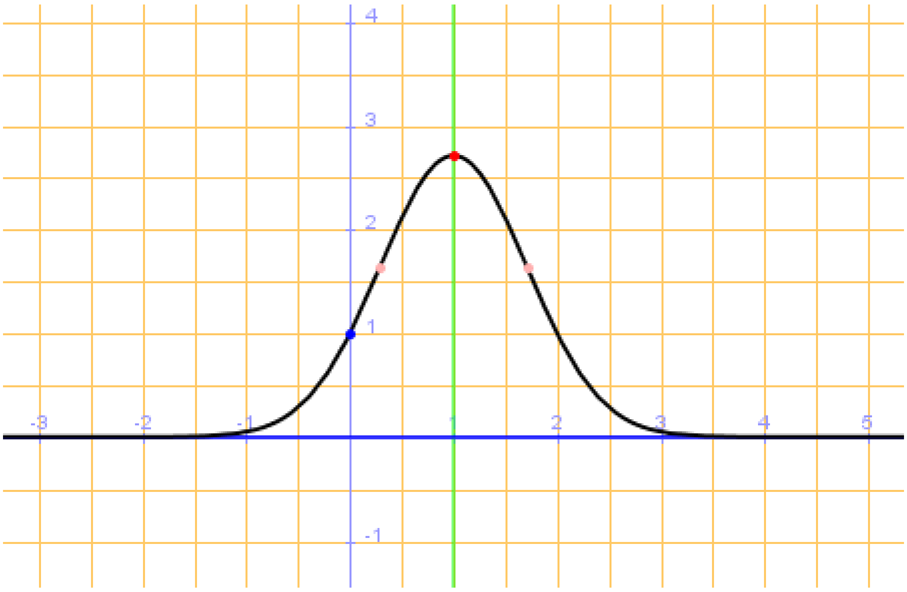
	(-∞,1)	1	(1,∞)
Sig(f'(x))	+	0	-
Monotonia	Crece	Máximo	decrece

Máximo: M(1,e)

Curvatura: f''(x)=(-2+(-2x+2)^2)· e^{-x^2+2x}=0 → 4x^2-8x+2=0 → x=$1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

	$(-\infty, 1-\frac{\sqrt{2}}{2})$	$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(1-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1+\frac{\sqrt{2}}{2})$	$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$(1+\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty)$
Sig(f'(x))	+	0	-	0	+
Monotonia	∪	PI	∩	PI	∪

Puntos de Inflexión: $(1-\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{e})$; $(1+\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{e})$



b) Si se cortan se cumple f(x)=g(x) → $e^{-x^2+2x} = x$,y por tanto $e^{-x^2+2x} - x = 0$. Si llamamos h(x)= $e^{-x^2+2x} - x$, tendremos que ver que h(x)=0. Aplicamos Bolzano:

1. h(x) continua en [0,2]
2. h(0)=1>0, h(2)=e^0-2=-1<0

Como cumple Bolzano, existe c∈(0,2): h(c)=0, y por tanto f(c)=g(c)

4. Dada la función f(x)=$\begin{cases} ax^2+1 & si\ \ x\le 1 \\ x+b & si\ \ x>1 \end{cases}$

a) Calcular a y b para que sea continua y derivable en R **(1 punto)**

b) Para los valores de a=b=1 calcular la recta tangente a f(x) en x=-1. **(0.75 puntos)**

c) Calcular el límite: $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x^2)-1}{x^3+2x^2}$ **(0.75 puntos)**

a) Tanto ax^2+1 como x+b son continuas y derivable en R. Luego solo hay que estudiar la continuidad y derivabilidad en x=1.

Continuidad:

f(1)=a+1= $\lim_{x\to 1^-} f(x)=a+1$ = $\lim_{x\to 1^+} f(x)=b+1$ →a=b

Derivabilidad: f'(x)=$\begin{cases} 2ax & si\ \ x\le 1 \\ 1 & si\ \ x>1 \end{cases}$

$f'(1^-)=2a=f'(1^+)=1$ → a=1/2, b=1/2

b) si a=b=1 → f(x)=$\begin{cases} x^2+1 & si\ \ x\le 1 \\ x+1 & si\ \ x>1 \end{cases}$

Recta tangente en x=-1:

P(-1,f(-1)) → P(-1,2)

m=f'(-1)=2(-1)=-2

y=2-2(x+1)=-2x

c) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x^2)-1}{x^3+2x^2}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-sen(x^2)\cdot 2x}{3x^2+4x}=\frac{0}{0}\underset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\cos(x^2)\cdot 4x^2-sen(x^2)\cdot 2}{6x+4}=0$

Hemos podido aplicar L'Hopital porque las funciones que aparecen en el denominador y numerador son continuas y derivables en x=0