TEMA 1. FUNCIONES REALES. DEFINICIÓN Y LÍMITES

1. Funciones reales de variable real. Dominio de una función
   1.1. Dominios de las funciones más habituales
2. Composición de funciones. Propiedades
3. Función inversa
4. Límite de una función. Funciones convergentes
   4.1. Límites laterales.
   4.2. Propiedades de los límites
5. Distintos tipos de límites
   5.1. Límites infinitos cuando x tiende a un número real (asíntota vertical)
   5.2. Límites finitos cuando x tiende a infinito (asíntota horizontal)
   5.3. Límites infinitos cuando x tiende a infinito
6. Cálculo de límites
   6.1. Operaciones con límites de funciones. Indeterminaciones
   6.2. Resolución de indeterminaciones del tipo $\frac{\infty}{\infty}$
   6.3. Resolución de indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$
   6.4. Resolución de indeterminaciones del tipo $\frac{k}{0}$
   6.5. Resolución de indeterminaciones del tipo $\infty\cdot 0$
   6.6. Resolución de indeterminaciones del tipo $\infty-\infty$
   6.7. Resolución de indeterminaciones del tipo 1^{∞}
   6.8. Resolución de indeterminaciones del tipo 0^{∞} y ∞^{0}

Contexto con la P.A.U.

En los exámenes de la PAU por lo general hay dos problemas (2.5 puntos) en cada una de las dos opciones del bloque de análisis. De esta forma el bloque de análisis es, de los tres, el más importante.

Este tema es básico para el conocimiento y dominio de las funciones que en los temas siguientes abordaremos con detenimiento. Por lo general en el examen de la PAU no hay problemas ni cuestiones específicamente relacionadas con este tema, si bien el no dominar los conceptos que se plantean en la unidad, hará dificultoso, por no decir imposible, realizar los ejercicios del examen relacionados con este, bloque I.

Nótese que con bastante asiduidad en el examen de la PAU, hay una o dos cuestiones relacionadas con el cálculo de límites de funciones, si bien por lo general se resuelven a partir del teorema de L'Hopital que veremos en el tema 4; no obstante en alguna ocasión estos límites se resuelven mediante los métodos de resolución que veremos en este tema, en especial los límites relacionados con el número ***e,*** las indeterminaciones exponenciales y los límites de funciones racionales.

1. Funciones reales de variable real. Dominio de una función

Las funciones se utilizan en numerosos campos, tanto de las ciencias (física, biología, química) como en economía, etc. Definamos funciones reales de variable real:

Definición: Una función real de variable real es una aplicación o correspondencia entre un subconjunto de R, llamado dominio de la función (*Dom(f)*),y otro subconjunto de R llamado conjunto imagen o recorrido de la función (*Im(f)*), tal que a cada elemento de Dom(f) le corresponda un ***único elemento*** de Im(f). Una forma habitual de expresar las funciones es:

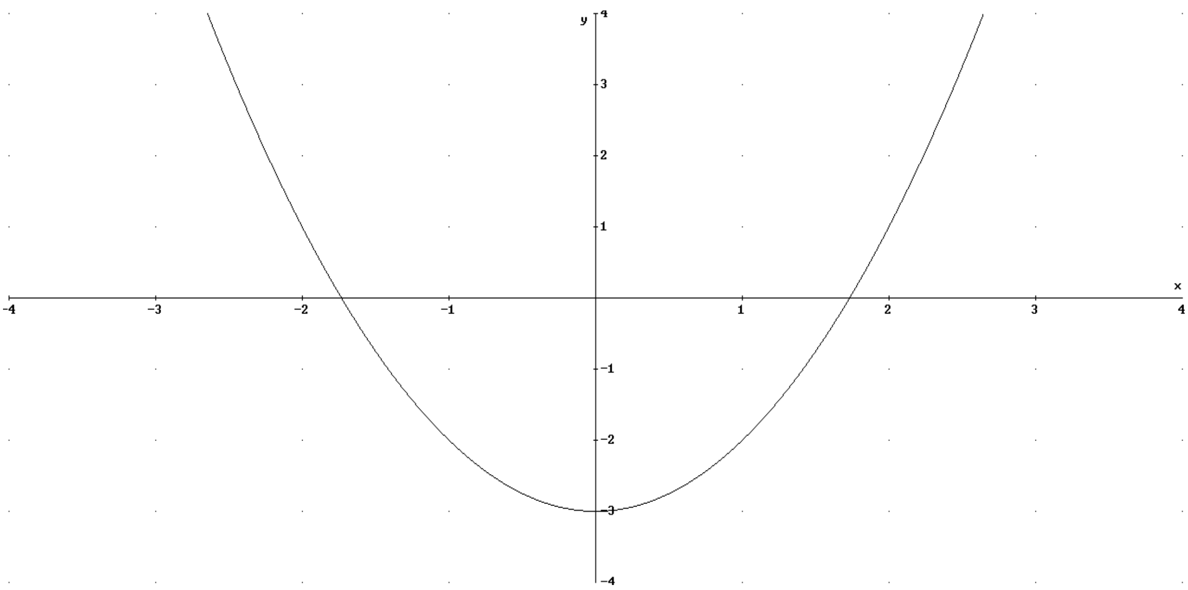
$$f: R \longrightarrow R$$
$$x \longrightarrow y = f(x)$$

Ejemplos de funciones:

a) y=f(x)=x^2-3

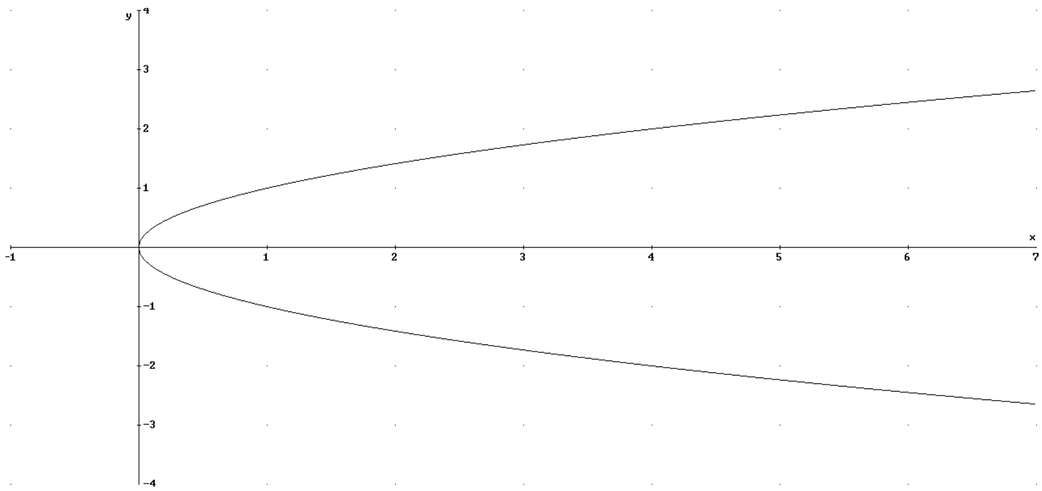
$$f: R \longrightarrow R$$
$$x \longrightarrow y = f(x) = x^2 - 3$$
$$3 \longrightarrow y = f(3) = 3^2 - 3 = 6$$

Gráfica:



Como puedes ver en la gráfica de la función, a cada valor x del conjunto dominio (eje OX, abscisas u horizontal) le corresponde un único valor y del conjunto imagen (eje OY, ordenado o vertical)

b) Veamos la siguiente gráfica que representa las soluciones de la expresión $y^2=x$:



En este caso la gráfica no representa una función, pues para cada elemento del dominio (eje OX) le corresponden dos valores. Por ejemplo, la solución a $x^2=4$ es y=2 e y=-2, que no es un valor único, como deberían de ser las funciones. En este caso tendremos que las soluciones de la ecuación de segundo grado vienen dadas por dos funciones: y= $\sqrt{x}$ (rama encima del eje OX), e y=-$\sqrt{x}$ (rama por debajo del eje OX).

No es necesario para que no sea función que todo valor x le correspondan dos o más valores, con que sólo haya un valor de x con dos o más imágenes la expresión no será una función.

1.1 Dominio de las funciones más usuales

En este apartado vamos a ver el estudio del dominio de las funciones reales de variable real más usuales y utilizadas:

- **Funciones polinómicas:** Son funciones del tipo $y=f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$, es decir, f(x) es un polinomio. El dominio de estas funciones es el conjunto de los números reales, ya que para cualquier valor de x, por ejemplo x=2, la función tiene sentido siendo su imagen $y= a_0+a_12+\ldots+a_n2^n$. Luego en estas funciones ***Dom(f)=R***

- **Funciones racionales fraccionarias:** Son del tipo $y=f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, siendo P(x) y Q(x) polinomios. El dominio de la función son todos los número reales, excepto aquellos que anulan el denominador (soluciones de Q(x)=0), ya que no se puede dividir entre cero. Así en estas funciones ***Dom(f)=R-{x:Q(x)=0}***

  Ejemplo: $f(x)=\dfrac{x^2-3x+4}{x^3-x}$ → Dom(f)=R-{0,1,-1}

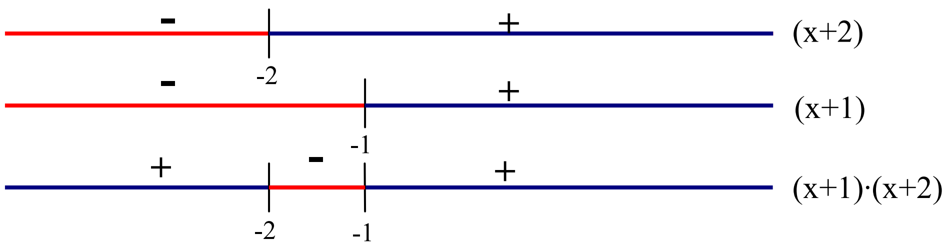
- **Funciones irracionales:** Son del tipo $f(x)=\sqrt[n]{g(x)}$; dos casos:

  - Si n es impar el dominio de f(x) es el mismo que el de g(x), pues las raíces impares de números negativos son valores reales. Así tenemos que ***Dom(f(x))=Dom(g(x)***

- Si n es par el dominio de f(x) es el conjunto de números del domino de g(x), tales que $g(x)\geq 0$, ya que las raíces pares de números negativos no son números reales. Así ***Dom(f(x))={x∈Dom(g(x): g(x)≥0}***

***Ejemplo**:* $y = f(x) = \sqrt{x^2+3x+2}$ → Dom(f)={x / $x^2+3x+2\geq 0$}

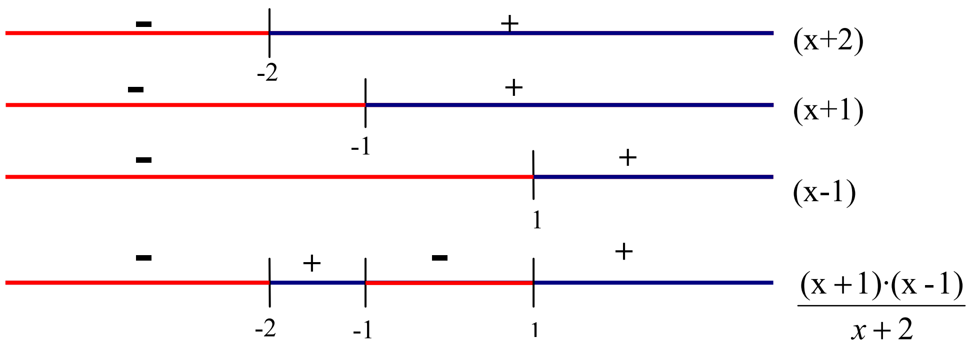
$x^2+3x+2=(x+2)\cdot(x+1)\geq 0$



Dom(f)=(-∞,-2] ∪ [-1,∞)

- **Funciones exponenciales:** son funciones del tipo $y=a^{g(x)}$, su dominio es el mismo que el dominio del exponente g(x). Así en estas funciones ***Dom(g(x))=Dom(f(x))***
- **Funciones logarítmicas:** $f(x)=\log_a(g(x))$ el dominio es el conjunto de puntos del dominio de g(x) en los que se cumple g(x)>0, pues no existe solución real para los logaritmos cuando el argumento es negativo o cero. Así en estas funciones ***Dom(g(x))={x∈Dom(f(x)):f(x)>0}***

  Ejemplo: y=*f(x)*= $\log\left(\frac{x^2-1}{x+2}\right)$ el dominio de g(x) es R-{2}, veamos el dominio de f(x) → $\frac{x^2-1}{x+2}=\frac{(x+1)(x-1)}{x+2}$>0:



Dom(f(x))= (-2,-1) ∪ (1,∞)

2. Composición de funciones. Propiedades

Definición: Dadas dos funciones f y g tales que $Im(f)\subseteq Dom(g)$ se llama *función compuesta* de g con f y se denota $(g\circ f)(x)$, a la función definida de la siguiente forma:

$(g\circ f)(x)=g[f(x)]$, es decir la imagen en $(g\circ f)$ de x es la imagen del punto f(x) en g:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "(g\circ f)"] & R \arrow[r, "g"] & R \\ x \arrow[r] & f(x) \arrow[r] & g(f(x)) \end{tikzcd}$$

Ejemplos:

$f(x)=x^2$, $g(x)=sen(x)$ → $(g\circ f)(x)=sen(x^2)$; $(f\circ g)(x)=sen^2(x)$

Propiedades:

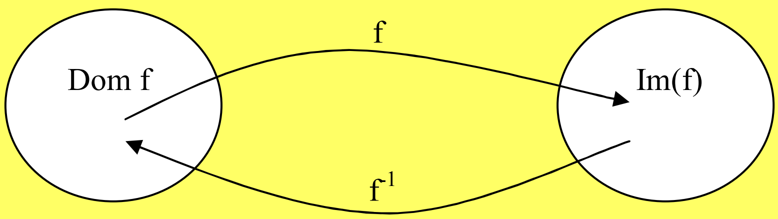
1.) *Asociativa:* $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$

2.) No conmutativa: en general la composición de funciones no es conmutativa $(g\circ f)\neq (f\circ g)$, ver ejemplo anterior → $sen(x^2)\neq sen^2(x)$

3. Función Inversa

Definición: *La función inversa* de una función f(x) inyectiva (no existen dos valores x_1 y $x_2\in Dom(f)$ tal que $f(x_1)=f(x_2)$) es otra función, que se denota por $f^{-1}(x)$, tal que se cumple:

$$(f\circ f^{-1})(x)=(f^{-1}\circ f)(x)=id(x)=x \quad \forall\, x\in Dom(f(x))$$



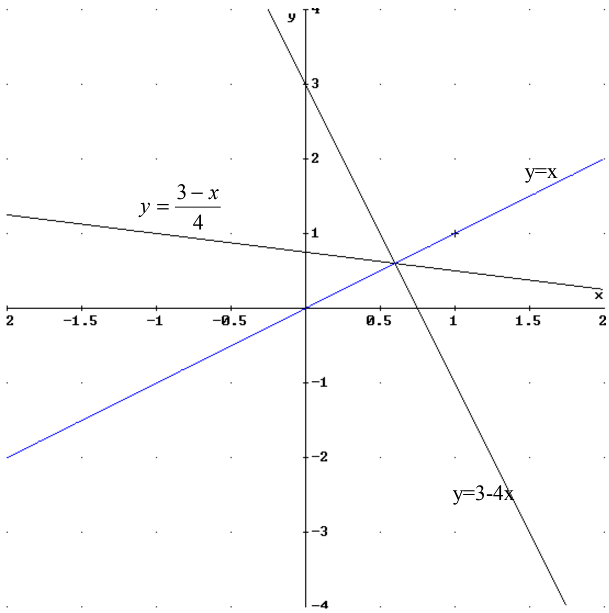
Ejemplos:

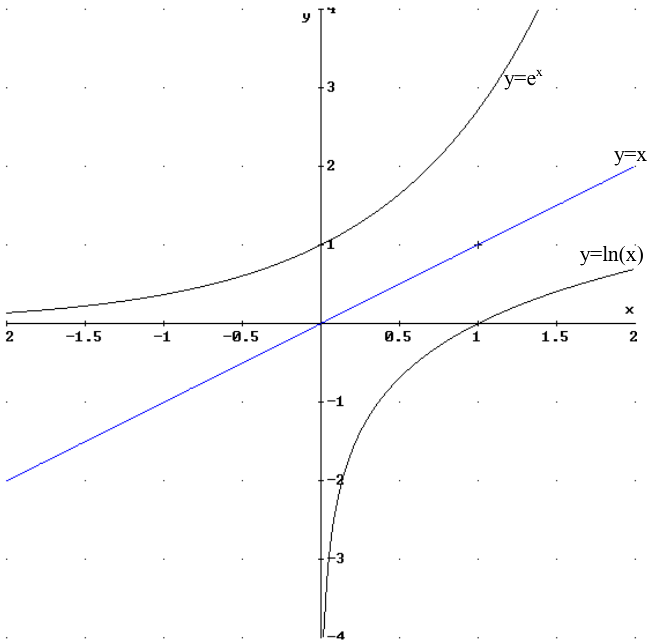
a) $y=f(x)=3-4x$ → $x=(3-y)/4$ → $f^{-1}(x)=\frac{3-x}{4}$. $(f\circ f^{-1})(x)=3-4\left(\frac{3-x}{4}\right)=x$

b) $y=\ln(x)$ → $y=e^x$

Representación gráfica de las función inversa: la propiedad más importante de las funciones inversas es que la gráfica de f(x) es simétrica a $f^{-1}(x)$ respecto a la bisectriz del primer cuadrante, y=x.

***Representación gráfica de los ejemplos*:**





Ejercicio 1. **Sean las siguientes funciones f(x)=1, g(x)=x^2+1, h(x)=$\frac{1}{x^2+1}$ realizar las siguientes composiciones: a) (g○f○h), b) (f○g○h), c) (h○g○f)**

a) $(g\circ f\circ h)=g\circ(f\circ h)=g\circ(f(\frac{1}{x^2+1}))=g(1)=2$

b) $(f\circ g\circ h)=f\circ(g\circ h)=f\circ(g(\frac{1}{x^2+1}))=f\left(\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^2+1\right)=1$

c) $(h\circ g\circ f)=h\circ(g\circ f)=h\circ(g(1))=h(1^2+1)=h(2)=1/5$

4. Límite de una función. Funciones convergentes

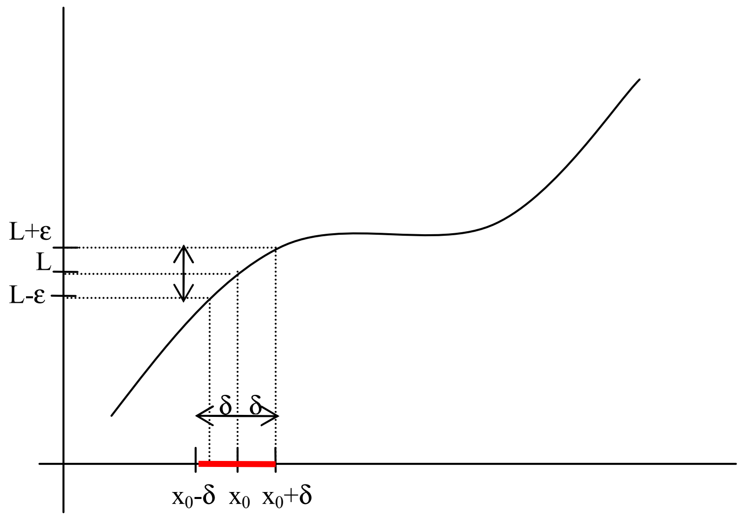
La idea intuitiva de límite de una función en un punto es fácil de comprender: es el valor hacia el que se aproxima la función cuando la variable independiente, x, se aproxima a dicho punto.

Ejemplo: sea f(x)=$\frac{1}{(x-1)^2}$ el límite de la función cuando x tiende a 1 es infinito, ya que cuanto más se aproxima x a 1 entonces $(x-1)^2$ más próximo a cero (positivo), y por tanto la función se hace más grande (1/0.00000001=100000000).

Definición: Matemáticamente una función f tiene límite L cuando x tiende a un valor x_0, y se denota $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ si se cumple:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0; \exists\, \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

El significado de la definición es la siguiente: sea cual sea el entorno de y=L, existe un entorno de $x=x_0$ tal que en este entorno la función cae dentro del entorno de L. Veámoslo gráficamente:



Vamos a considerar dos casos diferentes:

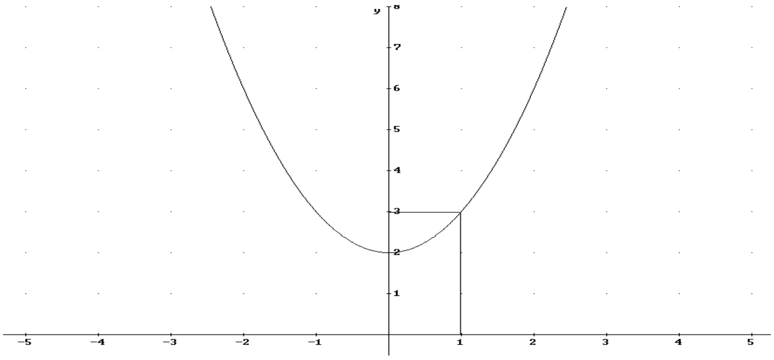
a) $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ y $f(x_0)=L$

b) $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ pero $f(x_0) \neq L$

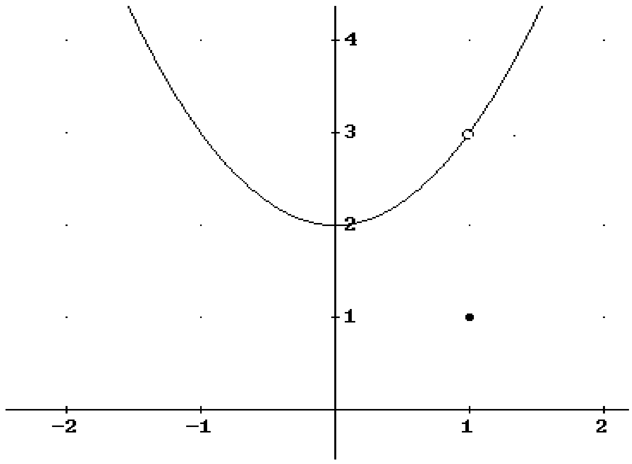
Ejemplo:

a) $f(x)=x^2+2$ → $\lim_{x \to 1} f(x) = 3 = f(1)$

Veamos la gráfica de la función:



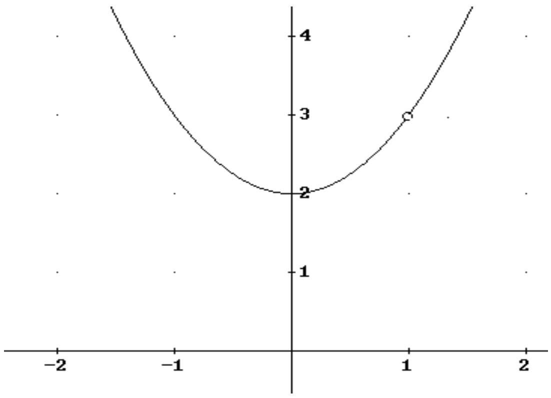
b) g(x)= $\begin{cases} x^2+2 & si \;\; x\neq 1 \\ 1 & si \;\; x=1 \end{cases}$ → $\lim_{x\to 1} g(x)=3 \;\; g(1)=1$



Definición: Dada una función f(x), se dice que es convergente en x_0 si, existe el límite $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$.

Para que f(x) sea convergente en x_0 no es necesario que x_0 pertenezca al dominio, por ejemplo

g(x)=x^2+2 si x∈R-{1} (es decir x≠1) → $\lim_{x\to 1} g(x)=3,\; 1\notin Dom(g(x))$



Cuando x se aproxima a 1 la función se acerca a y=3 (tanto antes de x=1 como después), aunque justo en x=1 la función no definida.

4.1 Límites laterales

Existen funciones definidas a trozos, son aquellas que están definidas de diferente manera a lo largo de distintos intervalos de la recta real. En estas funciones, cuando queremos estudiar el límite en los puntos donde cambia la expresión analítica, es necesario calcular los límites laterales, viéndose así la tendencia de la función a ambos lados del punto.

Definición: Una función f tiene límite L cuando x tiende a un valor x_0 por la izquierda, y se denota $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$, si se cumple:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0; \exists\, \delta > 0 : \; x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Consiste en estudiar el comportamiento de la función en el entorno a la izquierda de x_0.

Definición: Una función f tiene límite L cuando x tiende a un valor x_0 por la derecha, y se denota $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$, si se cumple:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0; \exists\, \delta > 0 : \; x_0 + \delta > x > x_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Consiste en estudiar el comportamiento de la función en todo entorno a la derecha de x_0.

Teorema: El límite de una función f(x) en x_0 existe si, y sólo si, existen los límites laterales y éstos coinciden:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$$

Este teorema será muy importante en los ejercicios de la PAU donde se nos pide estudiar la continuidad de funciones definidas a trozos. Además, como veremos en el apartado 6.4, es el método utilizado para resolver las indeterminaciones de los límites del tipo $\frac{k}{0}$

4.2. Propiedades de los límites:

1. Si una función es convergente en un punto ésta acotada en un entorno del punto.

2. Sean f(x) y g(x) dos funciones convergentes en x_0, tal que $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = L'$. Se cumplirá:

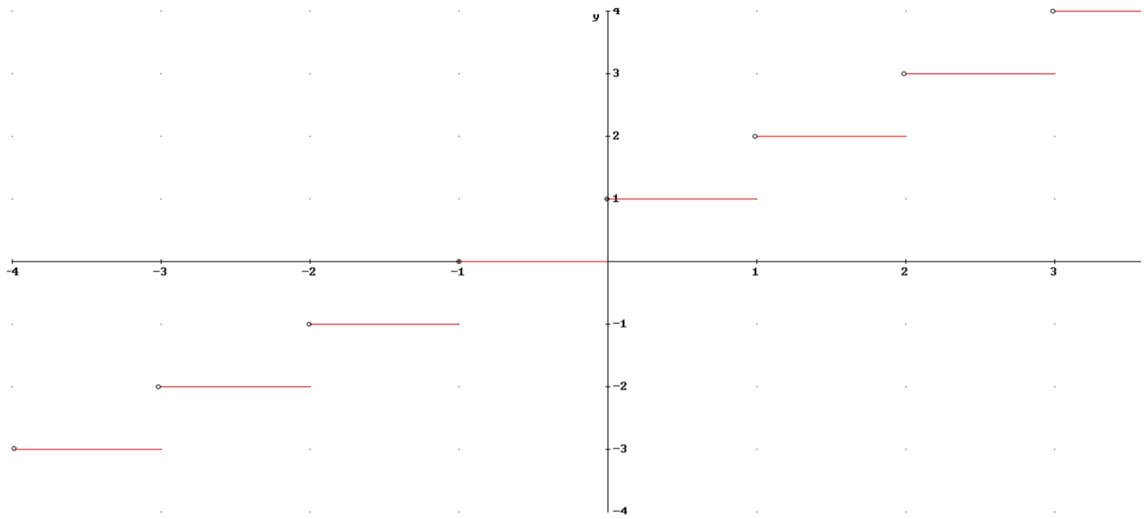
a) (f+g)(x) es convergente en x_0 tal que $\lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = L + L'$

b) (f-g)(x) es convergente en x_0 tal que $\lim_{x\to x_0}(f-g)(x) = L - L'$

c) (f·g)(x) es convergente en x_0 tal que $\lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x) = L\cdot L'$

d) (f/g)(x) es convergente en x_0 si L'≠0 tal que $\lim_{x\to x_0}(f/g)(x) = L/L'$

Ejercicio 2. Dada la función f(x) con la siguiente gráfica, calcular los límites:



a) $\lim\limits_{x\to n^+} f(x)$ con n∈Z → $\lim\limits_{x\to n^+} f(x)$=n+1

b) $\lim\limits_{x\to n^-} f(x)$ con n∈Z → $\lim\limits_{x\to n^-} f(x)$=n

c) $\lim\limits_{x\to n} f(x)$ con n∈Z → $\lim\limits_{x\to n} f(x)$ no existe pues $\lim\limits_{x\to n} f(x) \neq \lim\limits_{x\to n^+} f(x)$

Ejercicio 3. Hallar el limite, si existe, de f(x)=|x|-1 cuando x tiende a cero

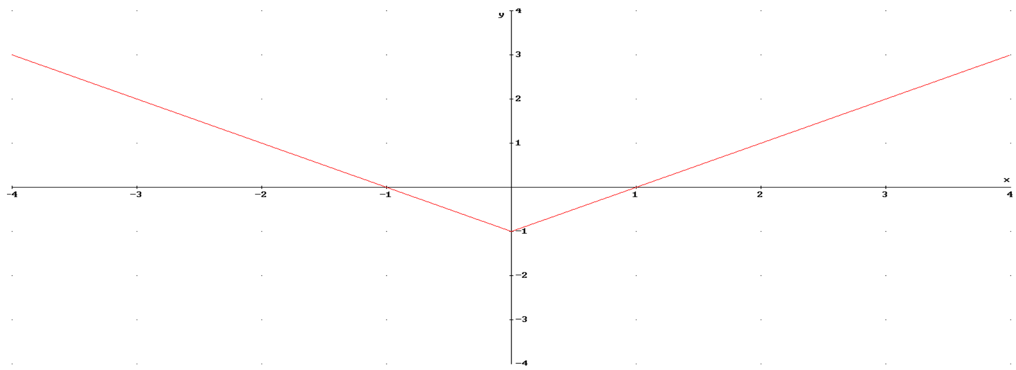
Siempre que tengamos una función con valor absoluto, la redefiniremos como una función definida a trozos. La forma de proceder es estudiar los intervalos donde el argumento del valor absoluto es negativo, cambiando en dichos intervalos el signo de dicho argumento y conservando el signo en el resto de la recta real:

$$|x|=\begin{cases} x & si \quad x>0 \\ -x & si \quad x\leq 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad f(x)=\begin{cases} x-1 & si \quad x>0 \\ -x-1 & si \quad x\leq 0 \end{cases}$$

Nota: el igual se puede poner en cualquiera de los dos trozos de la función (pero sólo en uno) ya que en ambos casos el valor de y es cero.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0-1=-1$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -0-1=-1$ → $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$

Veamos la gráfica de la función:



Ejercicio 4. Hallar el limite, si existe de f(x)=|(x²-1)| cuando x tiende a 1 y a -1

Definamos la función como una función a trozos. En este caso x^2-1 es negativo en el intervalo (-1,1).

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & si \quad x\leq -1 \\ -x^2+1 & si \quad -1<x<1 \\ x^2-1 & si \quad x\geq 1 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 1^+} f(x)=1^2-1=0$, $\lim_{x\to 1^-} f(x)=-1^2+1=0$ → $\lim_{x\to 1} f(x)=0$

$\lim_{x\to -1^+} f(x)=-(-1)^2+1=0$, $\lim_{x\to -1^-} f(x)=(-1)^2-1=0$ → $\lim_{x\to -1} f(x)=0$

5. Distintos tipos de límites

5.1 Límites infinitos cuando x tiende a un número real (asíntota vertical)

En este apartado vamos a estudiar el caso de funciones que cuanto más se aproxima x a un valor x_0, bien por la izquierda, por la derecha o por los dos, la función se hace infinitamente grande (tiende a +∞) o pequeña (tiende a -∞). Cuando esto ocurre se dice que la función f(x) tiene asíntota vertical en $x=x_0$ Veamos los siguientes casos:

Definición: Una función f(x) tiene limite +∞ cuando x tiende a x_0 por la izquierda si cuando para todo valor K existe un entorno a la izquierda de x_0, tal que la función en este entorno es mayor que K. Matemáticamente

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall K>0\ \exists\delta>0 : \forall x\in(x_0-\delta,x_0)\to f(x)>K$$

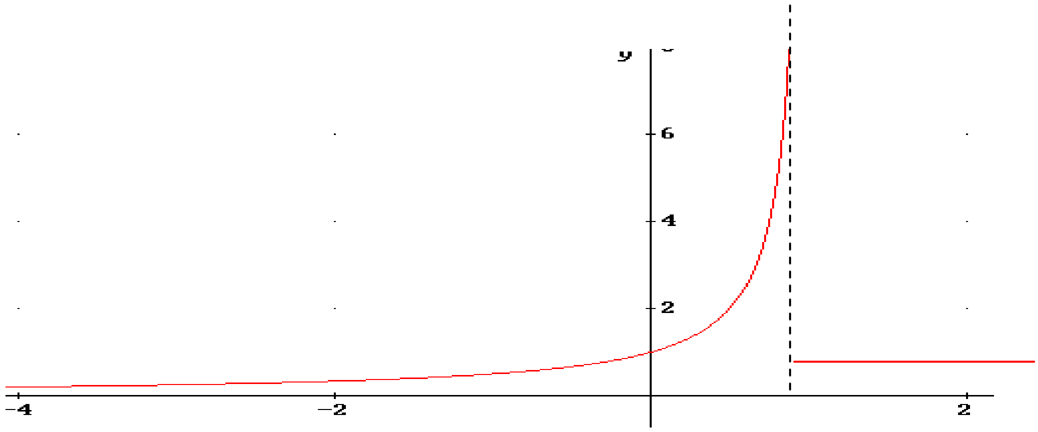
Ejemplo: f(x)= $\begin{cases} \frac{1}{1-x} & si \quad x<1 \\ 2 & si \quad x\geq 1 \end{cases}$

$\lim_{x\to 1^-} f(x)=+\infty$ ya que cuanto más se aproxime x a 1 por la izquierda entonces x-1 más pequeño y positivo y por tanto f(x) más grande. Es decir, cuando x→1^- entonces la función f(x)→+∞.

En cambio $\lim_{x\to 1^+} f(x)=2$

Cuando esto ocurre la función se aproxima a la asíntota vertical x=1. Es decir cuando la función se aproxima a 1 por la izquierda, ésta se acerca infinitamente a la recta x=1, que es paralela al eje OY

Veamos la gráfica:



Definición: Una función f(x) tiene limite $+\infty$ cuando x tiende a x_0 por la derecha, si para todo valor K existe un entorno a la derecha de x_0 tal que la función en este entorno es mayor que K. Matemáticamente

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall K>0\ \exists\delta>0 : \forall x\in(x_0, x_0+\delta) \to f(x) > K$$

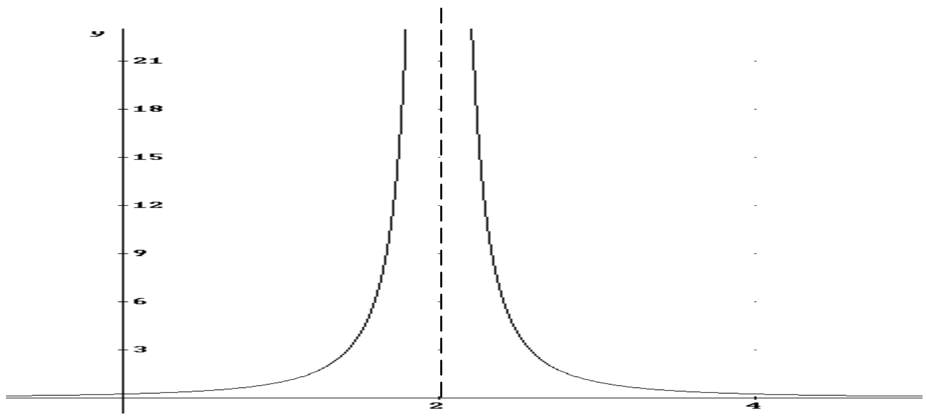
Definición: Una función f(x) tiene limite $+\infty$ al acercarse x a x_0, cuando para todo valor K existe un entorno de x_0 tal que la función en este entorno es mayor que K. Es decir, tiende a $+\infty$ por la izquierda y por la derecha. Matemáticamente

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall K>0\ \exists\delta>0 : \forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta) \to f(x) > K$$

Ejemplo: f(x)=$\dfrac{1}{(x-2)^2}$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{1}{(x-2)^2} = \infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{(x-2)^2} = \infty \end{cases} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{(x-2)^2} = \infty$$

Veamos la gráfica de la función y así podremos interpretar el significado del límite:



De igual forma que hemos estudiado el límite a +∞ , el límite a -∞ es equivalente, sólo hay que cambiar K por –K

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall -K < 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \to f(x) < -K$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall -K < 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \to f(x) < -K$$

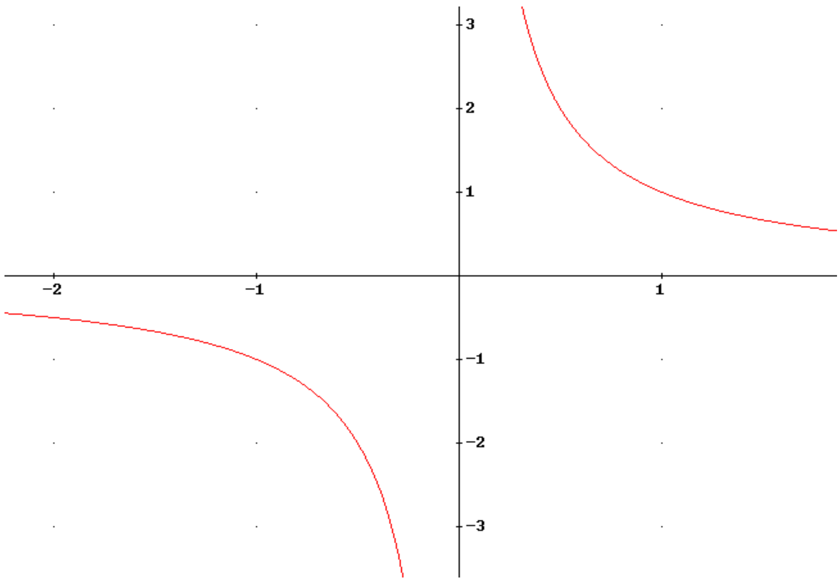
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall -K < 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to f(x) < -K$$

Muchas veces las funciones f(x) tienden a +∞ por un lado de x_0 y a -∞ por el otro lado de x_0; cuando esto ocurre el $\lim_{x \to x_0} f(x)$ no existe, ya que para existir debe coincidir los límites laterales.

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty, \ \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \to \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = no\, existe$$

Veamos la gráfica:



Definición: La función f(x) tiene asíntota vertical en x_0 cuando alguno de los dos límites laterales o los dos valen ∞ o -∞, es decir ocurre al menos uno de estos 4 límites:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty \ , \ \lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty \ , \ \lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$$

5.2 Límites finitos cuando x tiende a infinito (asíntota horizontal)

En este apartado estudiamos el comportamiento de algunas funciones en las que, cuando la x toma valores muy grandes o muy pequeños (es decir "muy negativos") la función se aproxima cada vez más a un valor L. Si esto ocurre se dice que f(x) tiende a L cuando x tiende a +∞ o a -∞. Veamos la definición:

Definición: Una función f tiene por límite un número real L cuando x tiende a +∞, si se cumple:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0, \exists\, K > 0 : \forall x > K \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Interpretación gráfica de la definición: Para cada entorno de y=L encontramos un valor de x=K, tal que para valores de x mayores que K, la función (y) dentro de este entorno en y=L.

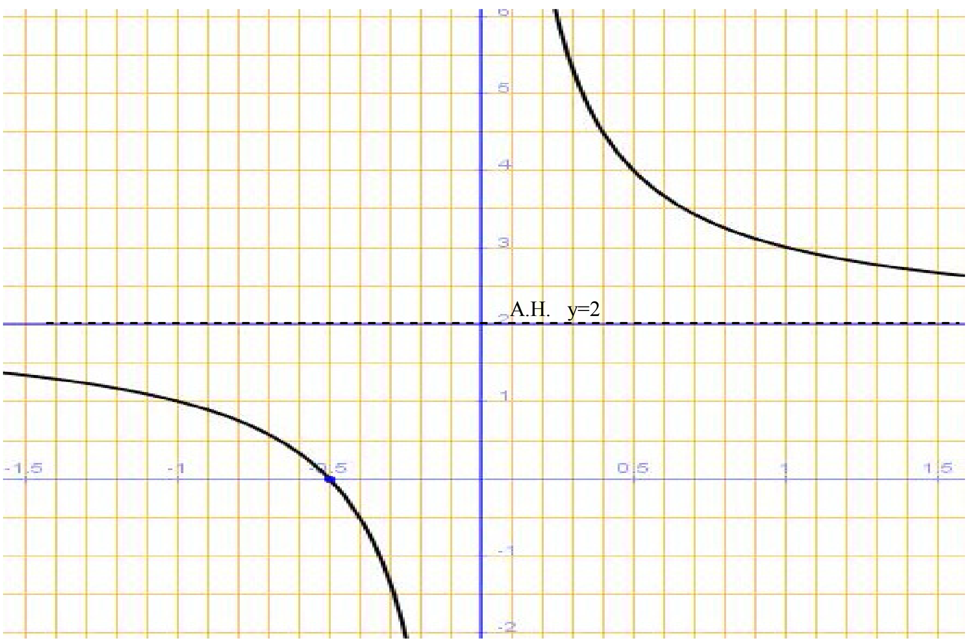
Definición: Una función f tiene por límite un número real L cuando x tiende a -∞, si se cumple:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0, \exists - K < 0 : \forall x < -K \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Interpretación gráfica de la definición: Para cada entorno de y=L encontramos un valor de x=-K, tal que para valores de x menores que -K, la función (y) dentro de este entorno en y=L.

Cuando ocurre una de las dos condiciones, o las dos, la función tiene una asíntota horizontal y=L. Es decir, cuando x se hace infinitamente grande (x→∞) o infinitamente pequeño (x→-∞), la función se acerca a la recta paralela al eje OX y=L

Ejemplo: y=(2x+1)/x



Definición: Una función f(x) tiene una asíntota horizontal en $y=y_0$ si se cumple una de las siguientes condiciones (o las 2):

a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = y_0$

b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = y_0$

5.3 Límites infinitos cuando x tiende a infinito

En este último apartado estudiaremos 4 casos:

a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$

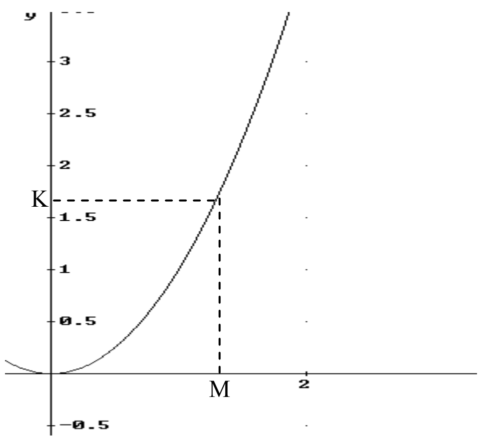
b) $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

c) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

d) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

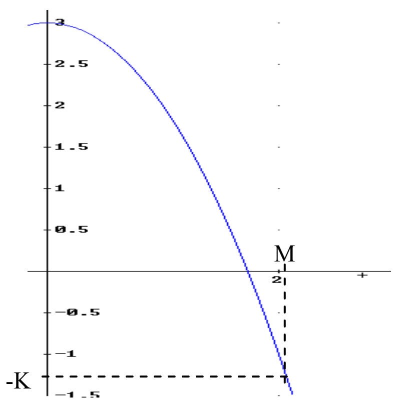
a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall K > 0, \exists M \in R : \forall x > M \Rightarrow f(x) > K$

Ejemplo: $\lim_{x\to\infty} x^2 = +\infty$



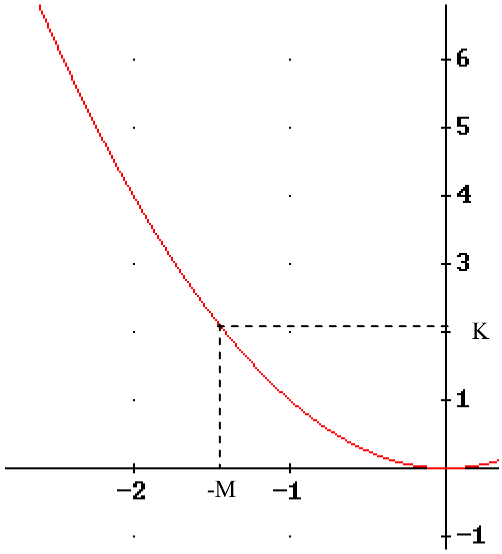
b) $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall -K < 0, \exists M \in R : \forall x > M \Rightarrow f(x) < -K$

Ejemplo: y=3-x^2 $\lim_{x\to\infty} -x^2 = -\infty$



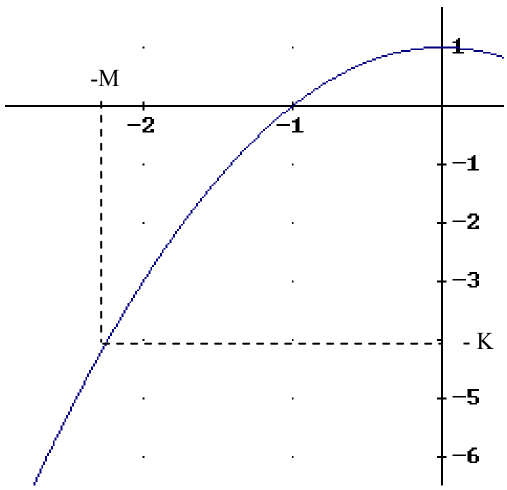
c) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall K > 0, \exists -M \in R : \forall x < -M \Rightarrow f(x) > K$

Ejemplo: y=f(x)=x^2, $\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$



d) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall -K < 0, \exists -M \in R : \forall x < -M \Rightarrow f(x) < -K$

Ejemplo: y=f(x)=-x^2+1 $\lim_{x \to -\infty} -x^2 + 1 = -\infty$



6. Cálculo de límites

6.1 Operaciones con límites. Indeterminaciones

En el apartado 4.2 vimos las propiedades de los límites, y como se relacionan los límites de dos funciones cuando estas funciones se están sumando, multiplicando y dividiendo. Al haber límites cuyo valor es ∞ y -∞, tendremos que ver cómo operan los números con ±∞. Veámoslo:

***Suma y diferencia*:**

1) $\forall k \in R \; k \pm \infty = \pm \infty$

2) $\infty + \infty = \infty$

3) $-\infty - \infty = -\infty$

Producto:

1) $\forall k \in R^{+}$ (k>0) k·∞=∞ → ejemplo $\lim_{x\to+\infty} 3x = +\infty$

2) $\forall -k \in R^{-}$ (-k<0) -k·∞=-∞ → ejemplo $\lim_{x\to+\infty} -3x = -\infty$

3) $\forall k \in R^{+}$ (k>0) k·(-∞)=-∞ → ejemplo $\lim_{x\to-\infty} 3x = -\infty$

4) $\forall -k \in R^{-}$ (-k<0) -k·(-∞)=∞ → ejemplo $\lim_{x\to-\infty} -3x = +\infty$

Cociente:

1) $\forall k \in R$ $\frac{k}{\pm\infty} = 0$ → ejemplo $\lim_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0$

2) $\forall k \in R^{+}$ $\frac{\pm\infty}{k} = \pm\infty$ → ejemplo $\lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{4} = -\infty$

3) $\forall -k \in R^{-}$ $\frac{\pm\infty}{-k} = \mp\infty$ → ejemplo $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{-4} = -\infty$

Exponente:

1) $\forall k \in R$ k>1 $k^{+\infty} = +\infty$ → ejemplo $\lim_{x\to+\infty} 2^{x} = +\infty$

2) $\forall k \in R$ 0<k<1 $k^{+\infty} = 0$ → ejemplo $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{x} = 0$

3) $\forall k \in R$ k>1 $k^{-\infty} = 0$ →ejemplo $\lim_{x\to-\infty} 2^{x} = 0$

4) $\forall k \in R$ 0<k<1 $k^{-\infty} = +\infty$ → ejemplo $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = +\infty$

Indeterminaciones:

1) ∞-∞ , -∞+∞ → ejemplo $\lim_{x\to\infty} x - x^{2}$

2) 0·(±∞) → ejemplo $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-2}(x^{2}+3x)$

3) $\frac{k}{0}$ → ejemplo $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$

4) $\frac{\pm\infty}{0}$ → ejemplo $\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x^{2}}}{x}$

5) $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ → ejemplo $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{2}+2}{x}$

6) $\frac{0}{0}$ → ejemplo $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+2x}{x}$

7) 1^{∞} → ejemplo: $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

8) 0^{∞} → ejemplo: $\lim\limits_{x\to 0}(x)^{\frac{1}{x}}$

9) ∞^{0} → ejemplo: $\lim\limits_{x\to \infty}(x)^{\frac{1}{x}}$

Nota: a) en el apartado 7, cuando expresamos 1^{∞} el 1 significa tendencia a 1 (de hecho $\lim\limits_{x\to\infty}(1)^x=1^{\infty}=1$). b) en el apartado 8, 0^{∞} es tendencia al 0.

6.2 Resolución de indeterminaciones del tipo $\frac{\infty}{\infty}$

Las situaciones más simples en las que aparece es al calcular los límites infinitos de fracciones polinómicas. Estas indeterminaciones se resuelven dividiendo el numerador y el denominador por la máxima potencia de x del denominador

Ejemplos:

a) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2-3x+2}{x^3+3x-5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{5x^2-3x+2}{x^3}}{\frac{x^3+3x-5}{x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{1+\frac{3}{x^2}-\frac{5}{x^3}}=\frac{0}{1}=0$$

b) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3+3x+2}{-x^2+3x-5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-x^3+3x+2}{x^2}}{\frac{-x^2+3x-5}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{-1+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}}=\frac{-\infty}{-1}=+\infty$$

c) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^2+3x+2}{-2x^2+3x-5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-3x^2+3x+2}{x^2}}{\frac{-2x^2+3x-5}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{-2+\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}}=\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2}$$

Conclusión*:*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}\ldots+a_0}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_0}$$

a) n>m → $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}\ldots+a_0}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_0}=0$

b) m>n → $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}\ldots+a_0}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_0}=\begin{cases}-\infty & si\ {}^{a_m}\!/_{a_n}<0\\ +\infty & si\ {}^{a_m}\!/_{a_n}>0\end{cases}$

c) *m=n*→ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}\ldots+a_0}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_0}=\frac{a_n}{a_n}$

Estos no son los únicos tipos de límites en donde aparece la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$, veamos otros casos diferentes

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1}\ldots + a_0}{k^x} = 0 \quad (k>1)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{k^x}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_0} = +\infty \quad (k>1)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1}\ldots + a_0}{\log_k x} = +\infty \quad (k>1)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_k x}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_0} = 0 \quad (k>1)$$

En estos límites hay que fijarse en la tendencia a ∞ de las funciones del numerador y del denominador. Así si la función del numerador crece más rápido se cumple que el limite será ± ∞ (el signo depende de los signos de la fracción); por el contrario si la función que más rápido crece es la del denominador el límite será 0; por último si ambas crecen de igual forma el limite será el cociente de los coeficientes de mayor grado de cada función. Ordenando las funciones ∞ de menor a mayor crecimiento a ∞ se cumple:

$$\ldots<\log_{10}(\mathbf{x}) <\log_3(x)< \log_2 x \ldots.<\sqrt{x} = x^{1/2} <x<\ldots<x^5\ldots<2^x<3^x<\ldots 10^x<\ldots$$

6.3. Resolución de indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$

Aparece este tipo de límites principalmente en 2 casos diferentes:

1) *Cociente de funciones polinómicas:* Se resuelven descomponiendo factorialmente numerador y denominador (aplicando Ruffini con raíz la del límite, ya que es el valor donde sea anulan los dos polinomios), simplificando los factores comunes.

Ejemplos:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^3-7x^2+14x-8} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x^2-5x+4)} = \lim_{x\to 2}\frac{(x+3)}{(x^2-5x+4)} = \frac{5}{-2}$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3-3x-2} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2+2x+1)}{(x+1)(x^2-x-2)} = \lim_{x\to -1}\frac{(x^2+2x+1)}{x^2-x-2} = \frac{0}{0} =$$

$$= \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)}{(x-2)} = \frac{0}{-3} = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3-3x}{2x^2-x} = \lim_{x\to 0}\frac{x(x^2-3)}{x(2x-1)} = \lim_{x\to 0}\frac{(x^2-3)}{(2x-1)} = \frac{-3}{-1} = 3$$

nota: cuando el límite tiende a 0 en vez de Ruffini sacamos factor común, pues la raíz es cero, y por tanto el factor es x.

2) *Cociente con funciones racionales:* Se resuelven multiplicando numerador y denominado por la expresión conjugada de la que lleva raíz y aplicando Ruffini:

Ejemplos:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{\sqrt{x+4}-2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2-x)(\sqrt{x+4}+2)}{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2-x)(\sqrt{x+4}+2)}{x+4-4}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2-x)(\sqrt{x+4}+2)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-1)(\sqrt{x+4}+2)}{1}=-4$$

6.4. Resolución de indeterminaciones del tipo $\frac{k}{0}$

Este límite puede ser +∞, -∞ o no existir por ser los límites laterales diferentes (uno +∞ y otro -∞). Se calcula a partir de los límites laterales:

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-1}{x-3}=\frac{k}{0}\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2-1}{x-3}=\dfrac{k}{0^+}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x^2-1}{x-3}=\dfrac{k}{0^-}=-\infty\end{cases}\quad \textit{no existe el límite}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-1}{(x-3)^2}=\frac{k}{0}\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2-1}{(x-3)^2}=\dfrac{k}{0^+}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x^2-1}{(x-3)^2}=\dfrac{k}{0^+}=+\infty\end{cases}\quad \lim_{x\to 3}\frac{x^2-1}{(x-3)^2}=+\infty$$

6.5. Resolución de indeterminaciones del tipo 0·∞

Se resuelven transformándolas en indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

***Ejemplo**:* $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3}{\sqrt{x^4-2}}\cdot(2x-3)=0\cdot\infty=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3(2x-3)}{\sqrt{x^4-2}}=\dfrac{-\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\frac{6x-9}{x^2}}{\sqrt{\frac{x^4-2}{x^4}}}=0$

6.6. Resolución de indeterminaciones del tipo ∞ - ∞

En estos límites domina la función que crezca tienda a ∞ más rápido (ver el final del apartado 6.2). Las indeterminaciones de este tipo con funciones irracionales que tiendan a +∞ igual de rápido se resuelven multiplicando y dividiendo la función por el conjugado:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+5x}-(x+3)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+5x}-(x+3)\right)\left(\sqrt{x^2+5x}+(x+3)\right)}{\sqrt{x^2+5x}+(x+3)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5x-(x^2+6x+9)}{\sqrt{x^2+5x}+(x+3)}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x-9}{\sqrt{x^2+5x}+(x+3)}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1-\frac{9}{x}}{\sqrt{1+\frac{5}{x}}+1+\frac{3}{x}}=-\frac{1}{2}$$

6.7. Resolución de indeterminaciones del tipo 1^∞

Estas indeterminaciones están relacionadas con el número e. Se calculan de la siguiente forma:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=1\\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty\end{array}\right\} \lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\cdot(f(x)-1)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\cdot(f(x)-1)}$$

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-3x}{x^2+4}\right)^{x^2} = 1^\infty = \lim\limits_{x\to\infty} e^{x^2\left(\frac{x^2-3x}{x^2+4}-1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x^2\frac{-3x-4}{x^2+4}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3x^3-4x^2}{x^2+4}} = e^{-\infty}=0$

6.8. Resolución de indeterminaciones del tipo 0^∞ y ∞^0

Estas indeterminaciones se resuelven aplicando logaritmos y transformándolas de este forma (aplicando la regla del logaritmo $\log(a^b)=b\cdot\log(a)$) en los anteriores límites:

Veamos un ejemplo de cada tipo:

Ejemplo 1:

$$L=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{x^2+2} = 0^\infty \longrightarrow \ln(L)=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{1}{x}\right)^{x^2+2} = \lim_{x\to\infty}(x^2+2)\cdot\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \infty\cdot\ln(0^+) = \infty\cdot(-\infty) = -\infty$$

Como $\ln(L)=-\infty \rightarrow L=e^{-\infty}=0$

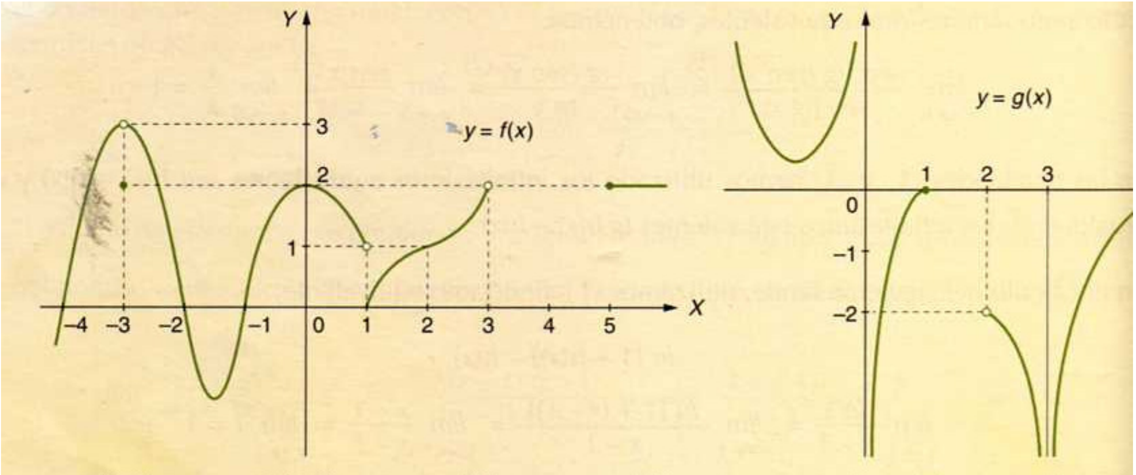
Ejemplo 2:

$$L=\lim_{x\to\infty}(x+1)^{\frac{1}{x}} = \infty^0 \longrightarrow \ln(L)=\lim_{x\to\infty}\ln(x+1)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{\infty}{\infty} = 0$$

Como $\ln(L)=0 \rightarrow L=e^0=1$

Ejercicios

Ejercicio 5. Calcula, en las siguientes funciones representadas, las siguientes cuestiones:



a) f(-3)=2, f(-2)=0, f(0)=2, f(4) no existe $4\notin Dom(f(x))$

b) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)=3$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=no\ existe$, $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=no\ existe$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=no\ \ existe$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=1$

c) g(1)=0, g(2) no existe $2\notin Dom(f(x))$

d) $\lim\limits_{x\to 3} g(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)=-2$, $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=0$, $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=no\ \ existe$, $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=no\ \ existe$

Ejercicio 6: Calcular el límite:

$$\lim_{x\to 2} e^{\frac{1}{x-2}} = e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x-2}} = \begin{cases} e^{\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{1}{x-2}} = e^{-\infty} = 0 \\ e^{\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2}} = e^{\infty} = \infty \end{cases} \quad \to \lim_{x\to 2} e^{\frac{1}{x-2}} = no\ existe$$

Ejercicio 7: Calcula cuánto debe valer "a" para que la siguiente función, f(x), sea convergente en x=1: $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x\leq 1 \\ 3\text{-}a\cdot x^2 & \text{si } x>1 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=3-a$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=2$. El límite $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ existe siempre que a=1.

Ejercicio 8: Siendo f(x)=$\sqrt{2x+3}$ calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+3}-3}{x-3} = \frac{\sqrt{11}-3}{1} = \sqrt{11}-3$$

Ejercicio 9: Calcular los siguientes límites

a) $\lim_{x\to+\infty} x^{-4}=0$, **b)** $\lim_{x\to-\infty} 4x^4=\infty$, **c)** $\lim_{x\to 0}\frac{3}{x^3}=\frac{3}{0}(ind)\begin{cases}\lim_{x\to 0^+}\frac{3}{x^3}=+\infty\\ \lim_{x\to 0^-}\frac{3}{x^3}=-\infty\end{cases}$ *no existe*

d) $\lim_{x\to 0}\frac{x^{-2}}{5}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{5x^2}=\frac{1}{0}(ind)\begin{cases}\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{5x^2}=+\infty\\ \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{5x^2}=+\infty\end{cases}=\infty$ **e)** $\lim_{x\to 0}\frac{x^5}{3}=0$, **f)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x^5}=0$

g) $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{x^2+1}+\frac{3}{x+2}\right]=0+0=0$, **h)** $\lim_{x\to+\infty}3^{-x}=3^{-\infty}=0$ **i)** $\lim_{x\to-\infty}3^{-x}=3^{\infty}=\infty$

j) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x=\left(\frac{2}{3}\right)^{\infty}=0$ **k)** $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{\sqrt{x^2-2}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-2}}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}}=\frac{\infty}{1}=\infty$

l) $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^4-3x-1}{x^3+3}=-\infty$ **m)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{x^3-1}=0$ **n)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-x+6}{x^2+3x+2}=-\infty$

o) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-1}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{2}{3}$ **p)** $\lim_{x\to-2}\frac{x^2-x-6}{x^3+3x^2+2x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x-3)}{x(x+1)(x+2)}=\frac{-5}{2}$

q) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4x+4}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-3)(x-2)}{(x-2)(x-2)}=\frac{-1}{0}\begin{cases}\lim_{x\to 2^-}\frac{x-3}{x-2}=\frac{-1}{0^-}=\infty\\ \lim_{x\to 2^+}\frac{x-3}{x-2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty\end{cases}$ no existe

r) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}+1)}{1}=2$

s) $\lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{4-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(2-\sqrt{4-x}\right)\left(2+\sqrt{4-x}\right)}{x\cdot(2+\sqrt{4-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{4-4+x}{x\cdot(2+\sqrt{4-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+\sqrt{4-x}}=\frac{1}{4}$

t) $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{1+x-(1-x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2}=1$

u) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2+6x-9}{x-3}=\frac{18}{0}=\begin{cases}\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2+6x-9}{x-3}=\frac{18}{0^+}=+\infty\\ \lim_{x\to 3^-}\frac{x^2+6x-9}{x-3}=\frac{18}{0^-}=-\infty\end{cases}$ no existe

v) $\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+6x-3}{2x^2-5x}=\frac{-3}{0}\begin{cases}\lim_{x\to 0^+}\frac{2x^2+6x-3}{2x^2-5x}=\frac{-3}{(0^+)^2-0^+}=\frac{-3}{(0^+)^2+0^-}=\frac{-3}{0^-}=\infty\\ \lim_{x\to 0^-}\frac{2x^2+6x-3}{2x^2-5x}=\frac{-3}{0^+}=-\infty\end{cases}$ no existe

w) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})=\lim_{x\to\infty}\frac{x+2-(x-2)}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})}=\frac{4}{\infty}=0$

x) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+1}{5x-1}\right)^{3x+2}=1^{\infty}=e^{\lim_{x\to\infty}(3x+2)\left(\frac{5x+1}{5x-1}-1\right)}=e^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6x+4}{5x-1}\right)}=e^{\frac{6}{5}}$

y) $\lim_{x\to1}\left(\frac{x^3+1}{x^2+1}\right)^{\frac{3}{x-1}}=1^{\infty}=e^{\lim_{x\to1}\left(\frac{3}{x-1}\right)\left(\frac{x^3+1}{x^2+1}-1\right)}=e^{\lim_{x\to1}\left(\frac{3}{x-1}\right)\left(\frac{x^2(x-1)}{x^2+1}\right)}=e^{\lim_{x\to1}\frac{3x^2}{x^2+1}}=e^{\frac{3}{2}}$

z) $\lim_{x\to2}(x-1)^{\frac{3}{x-2}}=1^{\infty}=e^{\lim_{x\to2}\frac{3}{x-2}(x-2)}=e^{3}$

aa) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{1}+\frac{1}{\sqrt{x}}}=1$

ab) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-5}-(2x-3)\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-5-(4x^2-12x+9)}{\left(\sqrt{4x^2-5}+(2x-3)\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{12x-14}{\left(\sqrt{4x^2-5}+(2x-3)\right)}=\frac{\infty}{\infty}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{12-\frac{14}{x}}{\sqrt{4-\frac{5}{x^2}}+(2-\frac{3}{x})}=\frac{12}{4}=3$

ac) $\lim_{x\to2^+}\frac{\sqrt{2x-4}}{x-2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to2^+}\frac{\sqrt{2}\sqrt{x-2}}{x-2}=\lim_{x\to2^+}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}}=\frac{\sqrt{2}}{0^+}=+\infty$

Ejercicios PAU

Septiembre 2004. Prueba B. C-4. Determínese el valor del parámetro *a* para que se verifique $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+ax+1}-x)=2$ **.(1 punto)**

$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+ax+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+ax+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+ax+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+ax+1}+x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2+ax+1-x^2\right)}{\left(\sqrt{x^2+ax+1}+x\right)}=$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(ax+1)}{\left(\sqrt{x^2+ax+1}+x\right)}=\frac{a}{\sqrt{1}+1}=\frac{a}{2}=2\ \rightarrow\ a=4$