UNIDAD 11. ESPACIOS VECTORIALES.

1. Espacios vectoriales
    1.1. Definición
    1.2. Ejemplos
2. Subespacio Vectorial
    2.1. Definición
    2.2. Condición necesaria y suficiente.
3. Combinación Lineal. Sistema Generador
4. Dependencia e Independencia Lineal.
5. Base de un Espacio Vectorial. Teorema de la Base.
6. Coordenadas de un vector.

Contexto con la P.A.U.

Éste es un tema que aunque en el índice se ha incluido en el Bloque de Álgebra lineal, podría también incluirse en el Bloque de Geometría. Pretende así sentar las bases teóricas de los dos siguientes temas.

Aunque en los exámenes de matemáticas de PAU no suele haber ningún ejercicio relacionado con este tema he considerado importante incluirlo, tanto por estar en el temario de la asignatura como por su importancia en las carreras de índole tecnológica como ingenierías, matemáticas, químicas o físicas.

.

1. Espacios vectoriales

1.1. Definición.

***Definición 1**:* Sea V un conjunto; se llama operación interna de V a una aplicación que nos relaciona dos elementos de V con otro de V. El ejemplo más utilizado es el de la suma:

$$+: V x V \longrightarrow V$$
$$u, v \longrightarrow u+v$$

Ejemplo: sea $V=R^2$ el conjunto de los vectores en el plano($R^2=\{(x,y): x,y\in R\}$);veamos como la suma de vectores en el plano es una operación interna:

$$+: R^2 x\ R^2 \longrightarrow R^2$$
$$\vec{u}=(x,y), \vec{v}=(x',y') \longrightarrow \vec{u}+\vec{v}=(x+x',y+y')$$

***Definición 2**:* Sea V un conjunto, se llama operación externa de V sobre R a una aplicación que nos relaciona un elemento de V y otro de R con otro de V. El ejemplo más utilizado es el del producto escalar:

$$\cdot: R x V \longrightarrow V$$
$$\lambda, v \longrightarrow \lambda\cdot v$$

***Ejemplo**:* sea R^2 el conjunto de los vectores en el plano, veamos como el producto de un escalar y un vector en el plano es una operación externa:

$$\cdot: R x\ R^2 \longrightarrow R^2$$
$$\lambda, \vec{v}=(x,y) \longrightarrow \lambda\vec{v}=(\lambda x, \lambda y)$$

Definición**:* Un conjunto V es un ***espacio vectorial sobre R si cumple:

1. Tiene una <u>operación interna</u> (suma) tal que cumple las siguientes propiedades:

   $\forall$ u,v,w$\in$V

   $$+: V x V \longrightarrow V$$

   i) conmutativa: u+v=v+u
   ii) asociativa (u+v)+w=u+(v+w)
   iii) elemento neutro:existe un elemento de V,que denotamos 0,tal que u+0=u
   iv) elemento opuesto: para todo elemento u existe otro, -u, tal que u+(-u)=0

2. Tiene una <u>operación externa</u> (producto escalar) tal que cumple las siguientes propiedades: $\forall\lambda, \mu\in R$, $\forall u,v\in V$

   $$\cdot: R x V \longrightarrow V$$

   i) Distributiva con R: $(\lambda+\mu)\cdot u=\lambda\cdot u+\mu\cdot u$
   ii) Distributiva con V: $\lambda(u+v)=\lambda\cdot u+\lambda\cdot v$
   iii) Asociativa: $(\lambda\cdot\mu)\cdot u=\lambda\cdot(\mu\cdot u)$
   iv) Elemento neutro: $1\cdot u=u$

Al conjunto V, con las anteriores operaciones y propiedades se le denomina espacio vectorial, y se representa por la terna **(V, +, $\cdot_R$).** Los elementos pertenecientes a V se les llama ***vectores***, siendo ***escalares*** los pertenecientes a R (se suelen utilizar las letras griegas minúsculas).

1.2. Ejemplos de Espacios Vectoriales

En este apartado vamos a ver varios ejemplos de espacios vectoriales. El origen de la estructura matemática del espacio vectorial son el conjunto de los vectores en el plano, R^2, y el conjunto de los vectores en el espacio, R^3, tantas veces utilizados en la física (velocidad, aceleración, posición…), si bien existen muchos otros espacios vectoriales como veremos a continuación.

1. Conjunto de los vectores en el plano con las operaciones de la suma de vectores y el producto escalar $(R^2,+,\cdot_R)$. Demostración

   1. Operación interna: $\vec{u}$=(x,y), $\vec{v}$=(x´,y´), $\vec{w}=(x'',y'')$

   $$+: R^2 x\, R^2 \longrightarrow R^2$$
   $$\vec{u}=(x,y),\vec{v}=(x',y') \longrightarrow \vec{u}+\vec{v}=(x+x',y+y')$$

      i) Conmutativa: $\vec{u}+\vec{v}=(x+x',y+y')=(x'+x,y'+y)=\vec{v}+\vec{u}$

      ii) Asociativa: $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=((x+x')+x'',(y+y')+y'')=$ $=(x+(x'+x''),y+(y+y'))=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$

      iii) Elemento neutro: $\vec{u}+\vec{0}=(x,y)+(0,0)=(x,y)=\vec{u}$

      iv) Elemento opuesto: $\vec{u}+(-\vec{u})=(x,y)+(-x,-y)=(0,0)=\vec{0}$

   2. Operación externa:

   $$\cdot: R x\, R^2 \longrightarrow R^2$$
   $$\lambda,\vec{v}=(x',y') \longrightarrow \lambda\cdot\vec{v}=(\lambda\cdot x,\lambda\cdot y)$$

      i) Distributiva en R:

      $$(\lambda+\mu)\vec{u}=((\lambda+\mu)\cdot x,(\lambda+\mu)\cdot y)=(\lambda\cdot x+\mu\cdot x,\lambda\cdot y+\mu\cdot y)=\lambda(x,y)+\mu(x,y)=\lambda\cdot\vec{u}+\mu\cdot\vec{u}$$

      ii) Distributiva en R^2:

      $$\lambda\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\lambda(x+x',y+y')=(\lambda(x+x'),\lambda(y+y'))=\lambda\cdot(x,y)+\lambda\cdot(x',y')=\lambda\vec{u}+\lambda\cdot\vec{v}$$

      iii) Asociativa: $(\lambda\cdot\mu)\cdot\vec{u}=((\lambda\cdot\mu)\cdot x,(\lambda\cdot\mu)\cdot y)=\lambda\cdot(\mu\cdot x,\mu\cdot y)=\lambda\cdot(\mu\cdot\vec{u})$

      iv) Elemento neutro $1\cdot\vec{u}=1\cdot(x,y)=(x,y)=\vec{u}$

2. El conjunto de los vectores en el espacio, $R^3=\{(x,y,z):x,y,z\in R\}$ con las operaciones de la suma de vectores y el producto escalar $(R^3,+,\cdot_R)$.

   Demostración: La demostración es equivalente a la vista par los vectores en el plano, con la salvedad de que hay que añadir una coordenada más.

3. El conjunto de los polinomios con grado $\leq$ n con coeficientes reales, $P_n(R)$, con las operaciones de la suma de polinomios y el producto escalar $(P_n(R),+,\cdot_R)$.

   Demostración:

   1. Operación interna: $p(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$; $q(x)= a_n'x^n+\ldots+a_1'x+a_0'$,

      $h(x)= a_n''x^n+\ldots+a_1''x+a_0''$

      $$+: Pn(R)xPn(R) \longrightarrow Pn(R)$$
      $$p(x),q(x) \longrightarrow p(x)+q(x)=(a_n+a_n')x^n+\ldots+(a_0+a_0')$$

      i) Conmutativa: $p(x)+q(x)= (a_n+a_n')x^n+\ldots+(a_0+a_0')=$
      $=(a_n'+a_n)x^n+\ldots+(a_0'+a_0)=q(x)+p(x)$

      ii) Asociativa: $(p(x)+q(x))+h(x)= ((a_n+a_n')+a_n'')x^n+\ldots+((a_0+a_0')+a_0'')=$
      $=(a_n+(a_n'+a_n''))x^n+\ldots+(a_0+(a_0'+a_0''))=p(x)+(q(x)+h(x))$

      iii) Elemento neutro: $p(x)+0(x)=(a_n+0)x^n+\ldots+(a_0+0)= a_nx^n+\ldots+a_0=p(x)$

      iv) Elemento opuesto: $p(x)+(-p(x))= (a_n- a_n)x^n+\ldots+(a_0+0)= 0\cdot x^n+\ldots+0=0(x)$

4. El conjunto de las matrices en cualquier dimensión, $M_{nxm}(R)$, con las operaciones de la suma y del producto escalar $(M_{nxm}(R),+,\cdot_R)$. Demostración:

La demostración es trivial, aplicando las propiedades de la suma y el producto de números reales en cada coeficiente de las matrices. A realizar por el alumno en casa.

Ejercicio 1: decir si son espacios vectoriales los siguientes conjuntos con las operaciones indicadas.

a) Las matrices cuadradas con operación interna el producto de matrices y el producto escalar, como operación externa

b) R^2 con el producto escalar como operación externa y la siguiente suma como operación interna:

$$\oplus: R^2xR^2 \longrightarrow R^2$$
$$(x,y),(x',y') \longrightarrow (x+x'-(y+y'),0)$$

a) Veamos si el conjunto de las matrices cuadradas con el producto de matrices como operación interna es espacio vectorial:

1. Operación interna: $\cdot: M_{nxn}(R)x\, M_{nxn}(R) \longrightarrow M_{nxn}(R)$

$$A, B \longrightarrow A\cdot B$$

i) Conmutativa A·B≠B·A (por lo general las matrices no conmutan), luego no es espacio vectorial con el producto como operación interna (sí es espacio cuando la operación interna es la suma de matrices, como vimos).

b) Veamos si R^2, con la suma anteriormente definida como operación interna, es espacio vectorial:

1. Operación interna:

i) Conmutativa: tenemos que ver si se cumple que u⊕v=v⊕u :

$$\vec{u} \oplus \vec{v} = (x + x' - (y + y'),0)$$
$$\|$$
$$\vec{v} \oplus \vec{u} = (x' + x - (y' + y),0)$$

ii) Asociativa: tenemos que ver si (u⊕v) ⊕w=u⊕ (v⊕w):

$$(\vec{u} \oplus \vec{v}) \oplus \vec{w} = (x + x' - (y + y'),0) \oplus (x'', y'') = ((x + x') + x'' - ((y + y') + y''),0)$$
$$\|$$
$$\vec{u} \oplus (\vec{v} \oplus \vec{w}) = (x, y) \oplus (x' + x'' - (y' + y''),0) = (x + (x' + x'') - (y + (y' + y'')),0)$$

iii) Elemento neutro: no existe, pues sea cual sea este vector, nos anula la segunda coordenada del vector. Veamos, suponiendo que el elemento neutro es (0,0): $\vec{u} \oplus \vec{0} = (x + 0 - (y + 0),0) = (x - y,0) \neq \vec{u}$

Luego no es espacio vectorial el conjunto de los vectores en el plano con la suma ⊕ como operación interna.

2. Subespacio vectorial

2.1. Definición

Definición: Sea (V,+,$\cdot_R$) un espacio vectorial y W un subconjunto de V (W⊆V). Se dice que W es subespacio vectorial de V si W, con las operaciones definidas en (V,+,$\cdot_R$), se comporta como un espacio vectorial, es decir, cumple las propiedades definidas en apartado anterior.

En la práctica no es necesario volver a comprobar nuevamente las diferentes propiedades de las operaciones interna y externa sobre W. Veamos una condición necesaria y suficiente en el siguiente subaparatado.

2.2. Condición suficiente y necesaria

Teorema: Sea (V,+,$\cdot_R$) un espacio vectorial y W un subconjunto de V (W⊆V); (W,+,$\cdot_R$) es subespacio vectorial de V si cumple las siguientes proposiciones:

1) ∀ u,v ∈W → u+v∈W (cerrado con la suma).
2) ∀u∈V, ∀λ∈R→ λ·u∈W (cerrado con el producto escalar).

Ejemplo: Estudiar cuales de los siguientes subconjuntos de R^2 son subespacios vectoriales

a) S={(0,y): y∈R}

1. ∀ $\vec{u}$=(0,y), $\vec{v}$=(0,y')∈S → $\vec{u}+\vec{v}=(0,y+y')\in$ S, pues y+y'∈R y la primera coordenada es nula

2. ∀ $\vec{u}$ =(0,y)∈S, ∀λ∈R → λ· $\vec{u}$ =(0,λ·y)∈S, pues λ·y∈R y la primera coordenada es nula

Es subespacio, al cumplir las dos condiciones.

b) T={(x,1): x∈R}

1. ∀ $\vec{u}$ =(x,1), $\vec{v}$ =(x',1)∈T → $\vec{u}+\vec{v}=(x+x',2)\notin$ T, pues la segunda coordenada no es 1.

No es subespacio, pues no cumple la primera condición.

c) A={(x,y):x+y=0}, se puede expresar de la siguiente forma: A={(x,-x):x∈R}.

1. ∀ $\vec{u}$ =(x,-x), $\vec{v}$ =(x',-x')∈A → $\vec{u}+\vec{v}=(x+x',-(x+x'))\in A$ pues la segunda coordenada es la opuesta a la primera.

2. ∀ $\vec{u}$=(x,-x)∈A, ∀λ∈R → λ·$\vec{u}$=(λ·x,-λ·x)∈A, pues la segunda coordenada es la opuesta a la primera.

Es subespacio al cumplir las dos condiciones.

Ejercicio 2: Decir si los siguientes subconjuntos son o no subespacios vectoriales

a) Matrices simétricas de dimensión n, $S_n(R)$ subespacio vectorial de las matrices cuadradas de dimensión n ($M_{nxn}(R),+,\cdot_R$).

1. $\forall A,B\in S_n(R) \rightarrow A=a_{ij}=A^t=a_{ji}\quad B=b_{ij}=B^t=b_{ji}$

$$\begin{matrix} C=c_{ij}=A+B=a_{ij}+b_{ij} \\ C^t=(A+B)^t=c_{ji}=a_{ji}+b_{ji} \end{matrix}\quad como\ \ a_{ij}=a_{ji}\ \ y\ b_{ij}=b_{ji}\ \ C=C^t \rightarrow A+B\in S_n(R)$$

2. $\forall\lambda\in R, \forall A\in S_n(R)\rightarrow D=d_{ij}=\lambda\cdot A=\lambda\cdot a_{ij}=\lambda\cdot a_{ji}=d_{ji}\rightarrow(\lambda\cdot A)=(\lambda\cdot A)^t\rightarrow\lambda\cdot A\in S_n(R)$

Es subespacio vectorial ($S_n(R),+,\cdot_R$)

Ejemplo: $\begin{pmatrix}1&3\\3&5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&2\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&5\\5&8\end{pmatrix}\quad 3\begin{pmatrix}4&8\\8&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12&24\\24&-3\end{pmatrix}$

(Iden matrices antisimétricas)

b) Matrices triangulares inferiores de dimensión n, $T^i_n(R)$ subespacio vectorial de las matrices cuadradas de dimensión n ($M_{nxn}(R),+,\cdot_R$).

$A\in T^i_n(R) \rightarrow a_{ij}=0$ j>i (los elemento encima de la diagonal son nulos)

1. $\forall A,B\in T^i_n(R)$:$C=c_{ij}=A+B=a_{ij}+b_{ij}=0$ si j>i pues $a_{ij}=b_{ij}=0$ → $A+B\in T^i_n(R)$

2. $\forall A\in T^i_n(R)$ y $\forall\lambda\in R$: $D=d_{ij}=\lambda A=\lambda a_{ij}=0$ i>j pues $a_{ij}=0$ → $\lambda A\in T^i_n(R)$

Es subespacio vectorial ($T^i_n(R),+,\cdot_R$) (Iden triangulares superiores).

c) El conjunto de polinomios de grado menor o igual que m, $P_m(R)$, es subespacio vectorial del conjunto de polinomios con grado menor o igual que n , $P_n(R)$,(n>m).

1. $\forall$ p(x), $q(x)\in P_m(R)\rightarrow p(x)+q(x)\in P_m(R)$ (sumando polinomios de grado menor que m el resultado es otro polinomio de grado menor que m)
2. $\forall$ $p(x)\in P_m(R)$ $\forall\lambda\in R\rightarrow$ $\lambda p(x)\in P_m(R)$ (el producto de un polinomio por un nº real es otro polinomio de mismo grado)

Ejercicio 3. Decir si son subespacios vectoriales de $(R^3,+,\cdot_R)$

a) $A=\{(x,y,0): x,y\in R\}\rightarrow$**Subespacio**

1. $\forall(x,y,0),(x',y',0)\in A\rightarrow(x,y,0)+(x',y',0)=(x+x', y+y',0)\in A$, pues la tercera coordenada es nula y la primera y la segunda son reales.
2. $\forall(x,y,0)\in A,\forall\lambda\in R\rightarrow\lambda(x,y,0)=(\lambda x,\lambda y,0)\in A$, pues la tercera coordenada es nula y la primera y la segunda son reales.

b) $B=\{(x,y,-x-y): x,y\in R\}\rightarrow$**Subespacio**

1. $\forall$ $(x,y,-x-y), (x',y',-x'-y')\in B\rightarrow(x,y,-x-y)+ (x',y',-x'-y')=$

   $=((x+x'),(y+y'),-(x-y-x'-y'))\in B$ pues la tercera coordenada es la opuesta a la suma de las dos primeras coordenadas

2. $\forall(x,y,-x-y)\in B$, $\forall\lambda\in R\rightarrow\lambda(x,y,-x-y)= (\lambda x,\lambda y,\lambda(-x-y))\in B$ pues la tercera coordenada es la opuesta a la suma de las dos primeras coordenadas

c) $C=\{(x,2x,3x): x\in R\}\rightarrow$**Subespacio**

1. $\forall$ $(x,2x,3x), (x',2x',3x')\in C\rightarrow$ $(x,2x,3x)+(x',2x',3x')=$

   $=((x+x'),2(x+x'),3(x+x'))\in C$ pues la segunda coordenada es el doble de la primera y la tercera el triple de la primera

2. $\forall$ $(x,2x,3x)\in C$, $\forall\lambda\in R$: $\lambda(x,2x,3x)=(\lambda x,2\lambda x,3\lambda x)\in C$, pues la segunda coordenada es el doble de la primera y la tercera el triple de la primera

d) $D=\{(x,y,z):x+y=3,x,y,z\in R\}=\{(x,3-x,z):x,z\in R\}\rightarrow$**No es Subespacio**

1. $(x,3-x,z), (x',3-x',z')\in D\rightarrow (x,3-x,z)+ (x',3-x',z')=$

$=(x+x',6-(x+x'),z+z')\notin D$, pues la 2ª coordenada no es como la del subespacio.

e) $E=\{(x,y,z): x\cdot z=3\ x,y,z\in R\}=\{(x,y,3/x) :x,y\in R\}\rightarrow$**No es Subespacio**

1. $\forall(x,y,3/x),(x',y',3/x')\in E : (x,y,3/x)+ (x',y',3/x')=$

   $=(x+x',y+y',3/x+3/x')\notin D.\rightarrow$ Pues $3/x+3/x'\neq3/(x+x')$

f) $F=\{(x,y,z):x=y^2\ x,y,z\in R\}=\{(y^2,y,z):y,z\in R\}\rightarrow$**No es Subespacio**

1. $\forall$ $(y^2,y,z), (y'^2,y',z')\in F$: $(y^2,y,z)+(y'^2,y',z')=(y^2+y'^2,y+y',z+z')\notin F$, pues $(y+y')^2\neq y^2+y'^2$

3. Combinación lineal. Sistema Generador.

***Definición**: Un vector $v\in V$ es **combinación lineal** de los vectores $\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ si se puede escribir de la siguiente forma:*

$v=\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\dots+\lambda_n v_n$ con $\lambda_1, \lambda_2,\dots,\lambda_n\in R$

***Ejemplos**:*

1. $(7,3)\in R^2$ es combinación lineal de los vectores $\{\overrightarrow{u_x}=\vec{i}=(1,0), \overrightarrow{u_y}=\vec{j}=(0,1)\}$:

   $(7,3)=7(1,0)+3(0,1)$ $\lambda_1=7$, $\lambda_2=3$
2. $(2,2,-5)\in R^2$ es combinación lineal de los vectores, $\{(1,1,0)$ y $(0,0,1)\}$:

   $(2,2,-5)=2(1,1,0)-5(0,0,1)$ → $\lambda_1=2$, $\lambda_2=-5$
3. $\begin{pmatrix}5 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ es combinación lineal de $\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\}$:

   $\begin{pmatrix}5 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ → $\lambda_1=5,\lambda_2=-2,\lambda_3=3,\lambda_4=4$
4. $p(x)=3+2x+5x^2$ es combinación lineal de $\{-2+2x, 1+x^2\}$:

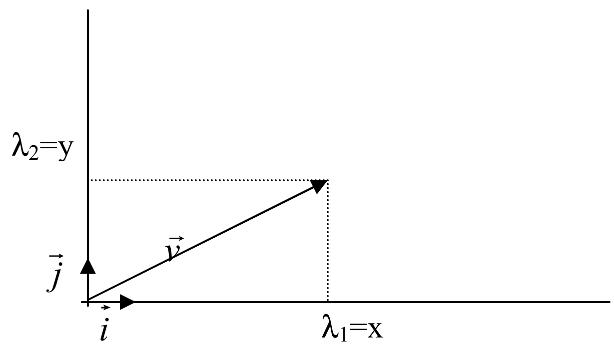
   $p(x)=3+2x+5x^2=1\cdot(-2+2x)+5\cdot(1+x^2)$ $\lambda_1=1$, $\lambda_2=5$

***Definición**: un conjunto de vectores $\{v_1,\dots,v_n\}$ de un espacio vectorial $(V,+,\cdot_R)$, es **sistema generador** de V si cualquier vector del espacio V se puede escribir como combinación lineal de éstos.*

***Ejemplos**:*

1. Los vectores $\{\overrightarrow{u_x}=\vec{i}=(1,0), \overrightarrow{u_y}=\vec{j}=(0,1)\}$ generan el espacio vectorial R^2. Demostración:

   $\forall\ \vec{v}=(x,y)\in R^2$ veamos que es combinación lineal de estos dos vectores: $(x,y)=x(1,0)+y(0,1)$→ $\lambda_1=x$, $\lambda_2=y$



2. Los vectores $\{\overrightarrow{u_x}=\vec{i}=(1,0,0), \overrightarrow{u_y}=\vec{j}=(0,1,0), \overrightarrow{u_z}=\vec{k}=(0,0,1)\}$ son generadores de R^3. Demostración:

   $\forall\ \vec{v}=(x,y,z)\in R^3$ veamos que es combinación lineal de estos dos vectores: $(x,y,z)=x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1)$→ $\lambda_1=x$, $\lambda_2=y$, $\lambda_3=z$.

3. Los vectores (1,1,0), (0,0,1) no generan R^3 pues, por ejemplo, el vector (2,1,3) no se puede expresarse como combinación lineal de estos, ya que no existen valores de λ_1, λ_2 tal que $(2,1,3)=\lambda_1(1,1,0)+\lambda_2(0,0,1)=(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_2)$. Veamos:

   $$\left.\begin{array}{l} 2=\lambda_1 \\ 1=\lambda_1 \end{array}\right\} \text{No solución pues } 2\neq 1.$$
   $$1=\lambda_2$$

   Los vectores (1,1), (0,1) si son generadores de R^2:

   $\forall\ \vec{v}=(x,y)\in R^2$ veamos que es combinación lineal de estos dos vectores: $(x,y)=\lambda_1(1,1)+\lambda_2(0,1)\rightarrow$

   $$\left.\begin{array}{l} \lambda_1=x \\ \lambda_1+\lambda_2=y \end{array}\right\} \quad \lambda_1=x,\ \lambda_2=y-x \rightarrow (x,y)=x(1,1)+(y-x)(0,1)$$

4. Las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ son generadores de $M_{2x2}(R)$.

   Demostración:

   $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema 1: Un conjunto de vectores $\{v_1,\ldots,v_m\}$ es generador del espacio $(V,+,\cdot)$, si el rango de la matriz $B=(v_1,\ldots,v_m)$ es igual a la dimensión del espacio vectorial (qué se definirá en el apartado 5 de este tema).

***Ejemplo**:* Demostrar, que si los siguientes vectores {(1,2,3), (0,1,-2), (0,0,1), (1,1,-2)} generan R^3.

Como se demostrará en el apartado 5, la dimensión de R^3 es 3. Veamos si el rango de B es igual a la dimensión:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow rang(B)=3 \rightarrow \text{Generan}$$

Ejercicio 4: Decir si generan los siguientes vectores de R^3 {(1,1,0), (0,1,1), (1,0,-1)}

Tendremos que ver si para cualquier vector $v=(x,y,z)\in R^3$ comprobaremos si es posible ponerla como combinación lineal de los tres vectores:

$$(x,y,z)=\lambda_1(1,1,0)+\lambda_2(0,1,1)+\lambda_3(1,0,-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} x=\lambda_1+\lambda_3 \\ y=\lambda_1+\lambda_2 \\ z=\lambda_2-\lambda_3 \end{array}\right\}$$

Tendrá solución para cualquier valor de x,y,z si el sistema es compatible; es decir, si rang(B)=3.

B=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ → rang(B)=2→ No generan.

4. Dependencia e independencia lineal.

***Definición**:* Los vectores $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ son linealmente dependientes si podemos encontrar números reales, λ_i, tal que:

$\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\ldots+\lambda_n v_n=0$ en donde al menos un $\lambda_i\neq 0$

***Definición**:* Los vectores $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ son linealmente independientes si no son linealmente dependientes; es decir, si cumple la siguiente igualdad

$\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2+\ldots+\lambda_n v_n=0$ sólo cierta cuando $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$ (solución trivial)

***Teorema 2**:* Si los vectores $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ son linealmente dependientes, entonces, cualquiera de ellos se puede expresar como combinación lineal del resto. Si son linealmente independientes ninguno de ellos se podrá expresar como combinación lineal del resto.

$\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ L.D. → $v_i=\mu_1 v_1+\ldots+\mu_{i-1}v_{i-1}+\mu_{i+1}v_{i+1}+\ldots+\mu n v_n$

$\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ L.I. → v_i no se puede expresar como combinación lineal del resto.

***Teorema 3**:* Los vectores $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$son linealmente independientes si el rango de la matriz $B=(v_1,\ldots,v_n)$ es igual al nº de vectores, n, (rang(B)=n). En el caso de que sea menor, entonces, son linealmente dependientes

rang($(v_1,v_2,\ldots,v_n)$)=n → L. I.

rang($(v_1,v_2,\ldots,v_n)$)<n → L. D.

***Ejemplos**:*

1. (1,2), (1,4), (1,0) veamos si son L.I. o L.D. :

$\lambda_1(1,2)+\lambda_2(1,4)+\lambda_3(1,0)=(0,0)$

$\left.\begin{array}{l} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0 \\ 2\lambda_1+4\lambda_2=0 \end{array}\right\}$

B=$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_1=2$, $\lambda_1=-1$, $\lambda_3=1$ es solución. *Linealmente dependientes.*

Teorema 1: (1,4)=2(1,2)-(1,0)

Teorema 2: Es un sistema homogéneo compatible indeterminado(rang(B)=2)

2. (1,0,1), (1,2,0), (0,1,1) veamos si son L.D. o L.I.:

$\lambda_1(1,0,1)+\lambda_2(1,2,0)+\lambda_3(0,0,1)=(0,0,0)$.

$$\left.\begin{array}{r}\lambda_1+\lambda_2=0\\ 2\lambda_2+\lambda_3=0\\ \lambda_1+\lambda_3=0\end{array}\right\} B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

Tenemos que la única solución es $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ →*linealmente independiente*, ya que el sistema es compatible determinado.

Teorema 1: $(1,0,1)\neq\mu_1(1,2,0)+\mu_2(0,0,1)$

Teorema 2: rang(B)=3.

3. $\{1, x^2, x^2+1\}$ veamos son L.D. o L.I.

$\lambda_1\cdot 1+\lambda_2\cdot x^2+\lambda_3\cdot(x^2+1)=0+0x+0x^2$

$$\left.\begin{array}{r}\lambda_1+\lambda_3=0\\ 0=0\\ \lambda_2+\lambda_3=0\end{array}\right\} B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

El sistema es compatible indeterminado; una solución distinta de la trivial es $\lambda_1=1$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=-1$. *Linealmente dependiente*

Teorema 1: $x^2+1=1\cdot 1+1\cdot x^2$≤

Teorema 2: rang(B)=2.

Ejercicio 5: ver si son L.D. o L.I.

a) (1,0,0), (2,0,0), (0,3,1)→ $\lambda_1(1,0,0)+\lambda_2(2,0,0)+\lambda_3(0,3,1)=(0,0,0)$

$$\left.\begin{array}{r}\lambda_1+2\lambda_2=0\\ 3\lambda_3=0\\ \lambda_3=0\end{array}\right\} B=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&3\\0&0&1\end{pmatrix}$$

La solución es $\lambda_3=0$ y $\lambda_1=-2\lambda_2$, luego existe alguna solución distinta de la trivial ($\lambda_1=-2$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=0$). *Linealmente dependiente.*

***Nota**:* Siempre que en el conjunto de vectores haya dos iguales o proporcionales (como los dos primeros), el sistema es linealmente dependiente

Teorema 1: (2,0,0)=2(1,0,0)+0(0,3,1)

Teorema 2: rang(B)=2

b) (1,2,1), (0,1,0), (0,0,1) → $\lambda_1(1,2,1)+\lambda_2(0,1,0)+\lambda_3(0,0,1)=(0,0,0)$

$$\left.\begin{array}{r}\lambda_1=0\\ 2\lambda_2+\lambda_3=0\\ \lambda_1+\lambda_3=0\end{array}\right\} B=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

La única solución es $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$, luego los vectores son *linealmente independientes*.

Teorema 1: $(1,2,1)\neq\mu_1(0,1,0)+\mu_2(0,0,1)$

Teorema 2: rang(B)=3.

c) (2,1,3), (1,2,-1) → $\lambda_1(2,1,3)+\lambda_2(1,2,-1)=(0,0,0)$

$$\left.\begin{array}{r}2\lambda_1+\lambda_2=0\\ \lambda_1+2\lambda_2=0\\ 3\lambda_1-\lambda_2=0\end{array}\right\} B=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\\3&-1\end{pmatrix}$$

Única solución es $\lambda_1=\lambda_2=0$. Los vectores son *linealmente independiente*

Teorema 1: $(2,1,3)\neq\mu(1,2,-1)$

Teorema 2: rang(B)=2=nº vectores

d) (1,2,5), (0,0,0), (4,-1,2) → $\lambda_1(1,2,5)+\lambda_2(0,0,0)+\lambda_3(4,-1,2)=(0,0,0)$

$$\left.\begin{array}{r}\lambda_1+4\lambda_3=0\\ 2\lambda_1-\lambda_3=0\\ 5\lambda_1+2\lambda_3=0\end{array}\right\} B=\begin{pmatrix}1&0&4\\2&0&-1\\5&0&2\end{pmatrix}$$

Tiene infinitas soluciones, $\lambda_1=\lambda_3=0$ y $\forall\lambda_3\in R$. Por ejemplo una solución no trivial puede ser $\lambda_1=\lambda_2=0$, $\lambda_3=1$. Luego los vectores son *linealmente dependientes.*

Nota: Siempre que uno de los vectores sea el vector nulo, el conjunto de vectores es linealmente dependiente

Teorema 1: $(0,0,0)=0\cdot(1,2,5)+0\cdot(4,-1,2)$

Teorema 2: rang(B)=2.

Ejercicio 6: ver si son L.D. o L.I.

a) $\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$ → $\lambda_1\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{r}\lambda_1+\lambda_2=0\\ 2\lambda_1=0\\ \lambda_3=0\\ \lambda_2+\lambda_3=0\end{array}\right\} B=\begin{pmatrix}1&1&0\\2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Tiene única solución $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$. Luego el conjunto de vectores (matrices) son linealmente independientes.

Teorema 1: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \mu_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Teorema 2: rang(B)=3

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_4 = 0 \\ -\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{array}\right\} B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tiene infinitas soluciones ($|B|=0$), por ejemplo $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=\lambda_4=-1$. Luego el conjunto de las 4 matrices son *linealmente dependientes*.

Teorema 1: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Teorema 2: rang(B)=3

5. Base de un espacio vectorial. Teorema de la Base

***Definición**:* Dado un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ en un espacio vectorial $(V,+,\cdot_R)$ forman una base si cumplen las dos siguientes condiciones:

1. linealmente independientes
2. sistema generador de V

Teorema de la base: Todas las bases de un espacio vectorial V tienen el mismo número de vectores. Al número de vectores se le llama ***dimensión*** del espacio vectorial.

Ejemplos:

1. $(R^2,+,\cdot_R)$ es espacio vectorial de dimensión 2, pues {(1,0), (0,1)}son base al ser linealmente independientes y generan. A d*emostrar por el alumno*
2. $(R^3,+,\cdot_R)$ es espacio vectorial de dimensión 3, pues {(1,0,0), (0,0,1), (0,0,1)}son base, al ser linealmente independientes y generar. *A demostrar por el alumno*

3. $(M_{mxn}(R),+,\cdot_R)$ es espacio vectorial de dimensión m·n. Ejemplo $M_{2x2}(R)$ dimensión 4, pues $\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\}$ son base al ser linealmente independiente y generar. *A demostrar por el alumno*
4. $P_n(R)$ es un espacio vectorial de dimensión n+1, pues $\{1,x,x^2,\ldots,x^n\}$ son base al generar y ser linealmente independientes. *A demostrar por el alumno*

***Teorema 4**:* Si un conjunto de n vectores $\{v_1, \ldots, v_n\}$es base de $(V,+,\cdot_R)$, siendo la dimensión de V igual a n :

a) Se cumple que si son linealmente independientes, entonces son generador de V; y al revés, si generan son linealmente independientes.

b) Se cumple que si son linealmente dependientes, entonces no generan V; y al revés, si no generan son linealmente dependientes.

De esta manera, para ver si un conjunto de n vectores en un espacio de dimensión n es una base, sólo hay que comprobar que son linealmente independientes o generan; no hará falta comprobar las dos condiciones. Por lo general es más fácil ver que son L.I.

***Teorema 5**:* Un conjunto de vectores $\{v_{1,} \ldots, v_n\}$ constituye una base si la matriz $B=(v_1,\ldots,v_n)$ es cuadrada (mismo nº vectores que la dimensión) y su determinante $|B|\neq 0$ (linealmente independientes).

***Teorema 6**:* Si el conjunto de vectores $\{v_{1,} \ldots, v_m\}$pertenece al espacio vectorial $(V,+,\cdot_R)$ de dimensión n<m, entonces estos vectores son linealmente dependientes.

***Teorema 7**:* Si el conjunto de vectores $\{v_{1,} \ldots, v_m\}$ pertenece al espacio vectorial $(V,+,\cdot_R)$ de dimensión n>m, entonces estos vectores no generan a V.

Ejercicio 7: Comprobar si los siguientes vectores son linealmente independientes, generan y si son base de sus respectivos espacios vectoriales.

a) {(1,2), (1,4), (5,3)}→ son tres vectores en un espacio vectorial de dimensión 2, luego los vectores son linealmente dependientes, y por lo tanto no son base.

Veamos si generan; para eso estudiemos el rango de B

$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 5\\ 2 & 4 & 3\end{pmatrix}$→ rang(B)=2 → Generan

b) {(1,0), (2,0)}→ son dos vectores al igual que la dimensión de R^2, pude suceder:

a) Son base y, por lo tanto, linealmente independientes y generan.

b) No son base y, por lo tanto, linealmente dependientes y no generan.

Para ver en qué caso nos encontramos miramos el determinante de B.

$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0$→estamos en el caso b) linealmente dependientes y no generan

c) {(1,1), (5,0)}→ son dos vectores, igual que la dimensión de R^2, estamos en el mismo caso que en b). Veamos en este caso en qué situación nos encontramos:

|B|=-5→Luego son base y por tanto linealmente independientes y generadores.

d) {(1,2,0), (0,1,0)}→ son dos vectores en un espacio vectorial de dimensión 3, luego no son generadores, y por lo tanto, tampoco son base.

Es fácil de ver que son linealmente independientes, ya que los dos vectores no son proporcionales. Otro método es ver el rango de B:

Rang(B)=2=numero de vectores→ linealmente independientes.

e) {(1,0,1), (2,1,1), (0,0,-1)}→ son 3, igual a la dimensión. Por lo tanto estamos en la misma situación que en b). Serán base o no según el valor de |B|:

$|B|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$ → son base de R^3, por lo tanto, generan y son linealmente independientes.

f) $\{1+x, 1-x^2, -x+2x^2\}$ base de $P_2(R)$ → son 3 vectores en un espacio vectorial de dimensión 3. Veamos si son base calculando |B|

$|B|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-3\neq 0$→ son base de $P_2(R)$ y, por lo tanto, generan y son linealmente independientes.

g) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\right\}$ base de $M_{2x2}(R)$→ son 4 matrices en un espacio pectoral de dimensión 4; veamos si son base viendo el valor de |B|

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}=-7\neq 0$ → son base de $M_{2x2}(R)$

6. Coordenadas de un vector.

Teorema 8: Sea $B=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base del espacio vectorial $(V,+,\cdot_R)$; entonces todo vector $u\in V$ se puede escribir de *forma única* como combinación lineal de los vectores B.

$u=\mu_1 v_1+\ldots+\mu_n v_n$. Los valores $(\mu_1,\mu_2, \ldots,\mu_n)$ se llaman ***coordenadas*** de u en la base B.

Ejemplos:

Ver las coordenadas del vector $\vec{u}=(1,3,-4)$

a) en la base canónica {(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)}:

(1,3,-4)=1(1,0,1)+3(0,1,0)-4(0,0,1)→ las coordenadas 1,3-4.

b) en la base B={(1,0,1), (2,0,-1), (0,3,0)}

(1,3,-4)=μ_1(1,0,1)+μ_2(2,0,-1)+μ_3(0,3,0)

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \mu_1 + 2\mu_2 \\ 3 &= 3\mu_3 \\ -4 &= \mu_1 - \mu_2 \end{aligned}\right\} \mu_1=-7/3,\ \mu_2=5/3,\ \mu_3=1$$

Luego las coordenadas en la base B son μ_1=-7/3, μ_2=5/3, μ_3=1

Matriz de cambio de base, B, y cambio de base inversa, B^{-1}: Dada una base W={v_1,v_2,…,v_n}, la matriz B es la formada por las coordenadas de los vectores de W. Así, cada columna de B es un vector de W→ B=(v_1,…,v_n). Estas matrices nos permiten obtener de forma rápida:

1. B→ las coordenadas de la base canónica cuando nos dan las coordenadas en otra base
2. B^{-1}→ las coordenadas en una base dada cuando tenemos el vector definido en la base canónica.

$$\begin{tikzcd} \{\text{Base W}\} \arrow[r, bend left, "B"] & \{\text{Base canónica}\} \arrow[l, bend left, "B^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Ejemplo: W={(1,0,1), (1,1,0), (0,0,1)}

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sea $\vec{v}_w=(3,4,5)_w$ un vector de R^3 en coordenadas de W; el valor de $\vec{v}$ en coordenadas canónicas es :

$$\vec{v}=\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}\right)^t=\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}^t=(7,4,8)=3(1,0,1)+4(1,1,0)+5(0,0,1)$$

Obtener las coordenadas de la base canónica en la base de W:

$$(\vec{u}_x)_w=\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)^t=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}^t=(1,0,-1)_w=1(1,0,1)-1(0,0,1)=(1,0,0)$$

$$(\vec{u}_y)_w = \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)^t = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}^t = (-1,1,1)_w\text{=-1(1,0,1)+1(1,1,0)+1(0,0,1)=(0,1,0)}$$

$$(\vec{u}_z)_w = \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)^t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^t = (0,0,1)_w\text{=1(0,0,1)}$$

Obtener las coordenadas de $\vec{u} = (3,0,2)$ en la base W:

$$\vec{u}_w = \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right)^t = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}^t = (3,0,-1)_w$$

Ejercicio 8: Sea el espacio vectorial $P_3(R)$; demostrar que W={1,(x-1),$(x-1)^2$,$(x-1)^3$ } es base. Calcular las coordenadas de $p(x)=4-x+x^3$ en dicha base.

Como el número de "vectores" de W es 4, será base si son linealmente independientes. Esto ocurre si |B|≠0.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad |B| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(triangular)$$

Luego W es base de $P_3(R)$. La matriz B es la matriz de cambio de base de W a la base canónica. Para obtener las coordenadas de p(x) en la base W tendremos que calcular B^{-1}

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p(x)_w = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)^t = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}^t = (4,2,3,1)_w = 4\cdot 1 + 2\cdot(x-1) + 3\cdot(x-1)^2 + 1\cdot(x-1)^3$$

Ejercicios:

Espacios vectoriales

Ejercicio 9. Decir si los siguientes conjuntos con sus operaciones son espacios vectoriales.

a. El conjunto de las matrices cuadradas, $M_{nxn}(R)$, con las siguientes operaciones:

   Interna→ $\oplus: M_{nxn}(R) \times M_{nxn}(R) \longrightarrow M_{nxn}(R)$

   $A,B \longrightarrow A\oplus B=(A+B)^t$

   Externa→ el producto escalar de un número por una matriz

b. El conjunto de los vectores en el espacio, R^3, con las siguientes operaciones:

   Interna: producto vectorial→ $\otimes: R^3 x R^3: \longrightarrow R^3$

   $(x,y,z),(x',y',z') \longrightarrow (yz'-zy',zx'-xz',xy'-yx')$

   Externa: el producto escalar un número por un vectores

Subespacios vectoriales

Ejercicio 10. Decir si son subespacios vectoriales

a. $A=\{p(x)=a_0+a_2x^2: a_0,a_2\in R\}$ subespacio de $P_2(R)$
b. $B=\{(x,-x,1/x): x\in R\}$ subespacio de R^3
c. D_n={matrices diagonales} subespacio de M_{nxn}

Ejercicio 11. Hallar las bases y la dimensión de los siguientes subespacios de R^3

a. $S=\{(x,y,z): x-2z=0, x,y,z\in R\}$
b. $T=\{(x,0,2x): x\in R\}$

Ejercicio 12. Hallar el valor de b para que el vector (1,b,-1) pertenezca al subespacio generado por los vectores {(1,2,0), (2,-1,5)}. Hallar la forma general de este subespacio.

Combinación lineal, generadores, base. Coordenadas

Ejercicio 13. Decir si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes, generadores y base.

c. {(1,2,-1), (0,-1,3), (1,1,1), (-3,0,0)} de R^3
d. $\{1+x, x+x^2, x^2\}$ de $P_2(R)$
e. $\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ de M_{2x2}

Ejercicio 14. Hallar los valores de x que hacen que los siguientes vectores{(x,2,0), (2x,6x,10), (3,x,15)} sean linealmente independientes

Ejercicio 15. Estudia el conjunto de vectores de R^3 W={(1,2,3),(0,2,4), (0,2,0)} forma base de R^3. En caso afirmativo expresa en esta base las coordenadas de (1,1,1)

Soluciones:

Ejercicio 9.

a.) Tenemos que comprobar que la operación interna definida cumple las siguientes propiedades: $\forall A,B,C\in M_{2x2}(R)$

i. Conmutativa: $A\oplus B=(A+B)^t=A^t+B^t=B^t+A^t=(B+A)^t=B\oplus A$

ii. Asociativa: $(A\oplus B)\oplus C=(A^t+B^t)\oplus C=(A^t+B^t)^t+C^t=(A+B)+C^t$

$$A\oplus(B\oplus C)=A\oplus(B^t+C^t)=A^t+(B^t+C^t)^t=A^t+(B+C)$$

No se cumple la propiedad asociativa, luego no es espacio vectorial.

b) Tenemos que comprobar que la operación interna definida cumple las siguientes propiedades: $\forall\ \vec{u},\vec{v},\vec{w}\in R^3$

i. Conmutativa: $\vec{u}x\vec{v}=$(yz'-zy',zx'-xz',xy'-yx')

$\vec{v}x\vec{u}=$(y'z-z'y,z'x-x'z,x'y-y'x)= $-\vec{u}x\vec{v}\neq\vec{u}x\vec{v}$

No se cumple la propiedad conmutativa, luego no es espacio vectorial.

Ejercicio 10

a.) Veamos si cumple las dos siguientes propiedades $\forall p(x),\ q(x)\in A,\ \forall\lambda\in R$

i. $p(x)+q(x)=a_0+a_0'+(a_2+a_2')\cdot x^2\in A$, pues tiene el término independiente y el de segundo grado.

ii. $\lambda\cdot p(x)=\lambda\cdot a_0+\lambda\cdot a_2x^2\in A$ pues tiene el término independiente y el de segundo grado.

Es subespacio

b.) $\forall\ \vec{u},\vec{v}\in B\ \forall\lambda\in R$; veamos si se cumple las dos propiedades

i. $\vec{u}+\vec{v}=(x+x',-(x+x'),\frac{1}{x}+\frac{1}{x'})\notin B$, pues $\frac{1}{x}+\frac{1}{x'}\neq\frac{1}{x+x'}$

No es subespacio.

c.) $\forall A,B\in D_n(R)\ \forall\lambda\in R$; veamos si se cumple las dos propiedades:

$A=a_{ij}=0$ si $i\neq j$, $B=b_{ij}=0$ si $i\neq j$

i. $C=c_{ij}=A+B=a_{ij}+b_{ij}=0$ si $i\neq j\rightarrow A+B\in D_n(R)$

ii. $D=d_{ij}=\lambda\cdot A=\lambda\cdot a_{ij}=0$ si $i\neq j\rightarrow\lambda\cdot A\in D_n(R)$

Es subespacio.

Ejercicio 11

a) S={(x,y,z): x-2z=0, x,y,z∈R}={(2z,y,z): y,z∈R}

Todo vector de S se puede poner como combinación lineal de (2,0,1), (0,1,0): (2z,y,z)=z·(2,0,1)+y·(0,1,0) ∀ y,z∈R. La dimensión es 2 (2 parámetros libres) La base se consigue dando valores a las variables (tantos como la dimensión)→

y=0, z=1 (2,0,1)

y=1,z=0 (0,1,0)

b) T={(x,0,2x): x∈R}

Todo vector de S se puede poner como combinación lineal de (1,0,2): (x,0,2x)=x·(1,0,2), x∈R. Dimensión 1 (1 parámetro libre). La base se consigue dando valores a las variables (tantos como la dimensión), x=1→ (1,0,2) base de T

Ejercicio 12

(1,b,-1) ∈ <(1,2,0), (2,-1,5)>→ (1,b,-1)=λ_1(1,2,0)+λ_2(2,-1,5)

$$\left.\begin{array}{l}1=\lambda_1+2\lambda_2\\ -1=5\lambda_2\end{array}\right\}\lambda_2=-\frac{1}{5}\ ,\ \lambda_1=\frac{7}{5}$$

(1,b-1)= $\frac{7}{5}$(1,2,0) $-\frac{1}{5}$(2,-1,5)=(1, 3,-1). Luego b=3

Llamaremos B al subespacio B={x(1,2,0)+y(2,-1,5)=(x+2y,2x-y,5y) x,y∈R}

Ejercicio 13

a) {(1,2,-1), (0,-1,3), (1,1,1), (-3,0,0)} son vectores de R^3, cuya dimensión es 3, luego no pueden ser linealmente independientes, y por lo tanto, son linealmente dependientes.

Para ver si son generadores tenemos que estudiar el rango de la matriz B. Si el rango es 3 entonces serán generadores.

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & -3\\ 2 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 1 & 0\end{pmatrix}$$ rang(B)=3, luego son generador de R^3.

b) {1+x, x+x^2, x^2}. La dimensión de $P_2(R)$ es 3, igual que el número de vectores. Pueden ocurrir dos cosas:

1) Son linealmente independientes y generadores, luego base

2) Son linealmente dependientes y no generan, luego no son base.

Para ver en cuál de los dos casos estamos veamos el valor del determinante de B.

$$B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$, det(B)=1, luego estamos en el caso 1 .

c) $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\right\}$, la dimensión es 4, igual que el número de matrices, luego, al igual que en el apartado anterior, tenemos que ver si el determinante de los coeficientes es distinto de cero.

$$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -1 & 0\\ 3 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\qquad |B|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -1 & 0\\ 3 & 0 & 0 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 3 & 0 & 3\end{vmatrix}=3\neq 0.$$

Las matrices son linealmente independientes y generadores, y por lo tanto base.

Ejercicio 14

{(x,2,0), (2x,6x,10), (3,x,15)} linealmente independiente si el determinante de los coeficientes es distinto de cero.

$$|B|=\begin{vmatrix}x & 2x & 3\\ 2 & 6x & x\\ 0 & 10 & 15\end{vmatrix}=20(4x^2-3x+3)\neq 0 \rightarrow x\neq\frac{3\pm\sqrt{9-48}}{8}\notin \mathbb{R}.$$

Luego, independientemente del valor de x, los vectores son linealmente independientes, y por lo tanto base.

Ejercicio 15

W={(1,2,3),(0,2,4), (0,2,0)}, son base ya que el determinante de B es distinto de cero.

$$|B|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 2\\ 3 & 4 & 0\end{vmatrix}=-8\neq 0 \rightarrow B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -3/4 & 0 & 1/4\\ -1/4 & 1/2 & -1/4\end{pmatrix}$$

$$(1,1,1)=\left(\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -3/4 & 0 & 1/4\\ -1/4 & 1/2 & -1/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\right)^t=\begin{pmatrix}1\\ -1/2\\ 0\end{pmatrix}^t=(1,-1/2,0)_w$$