UNIDAD 12. ECUACIONES DE RECTA Y PLANO

Contexto con la P.A.U.

Entramos con este tema en el último bloque del libro, la geometría. La importancia de este bloque en la PAU queda de manifiesto año tras año. En los últimos años uno de los dos problemas de 2.5 puntos de cada una de las dos opciones es un problema de geometría.

Entramos en el bloque cuyos problemas quizás sean los más complicados del curso, ya que en muchos casos se requieren una buena visión espacial y de buscar estrategias para resolver los problemas. Si bien en muchas ocasiones, y casi todas las cuestiones son "problemas tipo", como los que vamos a hacer en estos dos temas. Una vez entendido el problema, y elaborada la estrategia de resolución los cálculos son sencillos, no como los vistos en el bloque de análisis.

1. Introducción. Espacio Afín

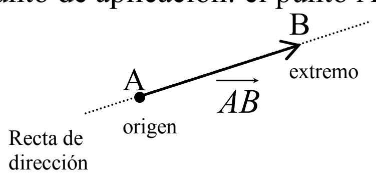
1.1. Vector en el espacio. Vector libre y fijo.

Como hemos estudiado en el tema anterior el conjunto de los vectores del espacio, con las operaciones de la suma de vectores y el producto escalar de vector por un número es espacio vectorial. De hecho la definición matemática de espacio vectorial surge para interpretar las propiedades de las magnitudes físicas vectoriales (velocidad, aceleración, fuerza…)

Así $(R^3,+,\cdot)$ es espacio vectorial, donde $R^3=\{(x,y,z):\ x,y,z\in R\}$. El conjunto de los elementos que forman parte de R^3 se llaman vectores en el espacio. Dentro de los vectores distinguiremos entre vectores fijos y libres:

a. ***Vector fijo*** de origen A y extremo B, es el segmento orientado caracterizado por tener las siguientes partes:

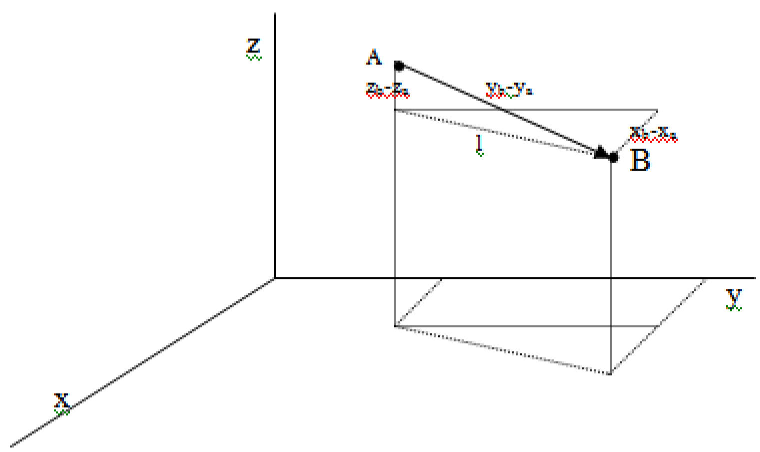
- Dirección: es la recta que une los dos puntos o cualquiera paralela
- Sentido: es la orientación que tiene, desde A hasta B
- Modulo: es la longitud del segmento orientado
- Punto de aplicación: el punto A



Coordenadas de vector fijo: Si $A(x_a,y_a,z_a)$, $B(x_b,y_b,z_b)$ son las coordenadas de los puntos que forman el vector, las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ son las que se obtiene restando las coordenadas de B menos las de A:

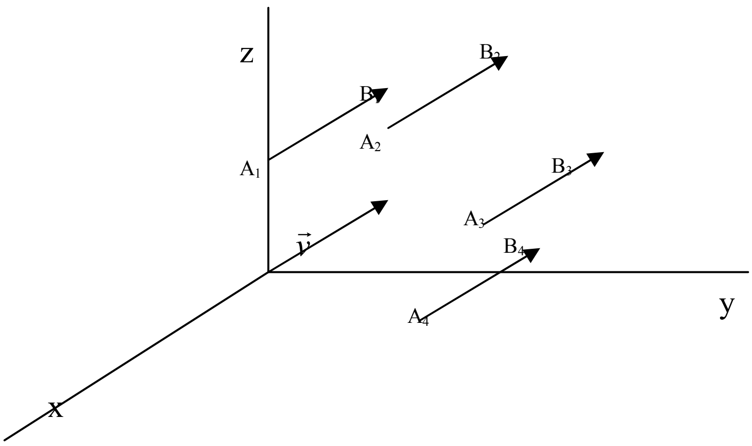
$$\overrightarrow{AB}=B-A=(x_a,y_a,z_a)-(x_b,y_b,z_b)=(x_b-x_a,\ y_b-y_a,\ z_b-z_a)$$

Módulo del vector: es igual a la distancia entre A y B. Utilizando Pitágoras tendremos que $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{l^2+(z_b-z_a)^2}=\sqrt{(x_b-x_a)^2+(y_b-y_a)^2+(z_a-z_b)^2}$



b. ***Vector libre:*** Sean los vectores con igual módulo, dirección (situadas en rectas paralelas) y sentido ($\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_2B_2}$, $\overrightarrow{A_3B_3}$ …), estos vectores se llaman ***equipolentes***. Todos los vectores equipolentes tienen mismas las coordenadas.

El conjunto de todos los vectores equipolentes a uno dado definen un vector libre $\vec{v}$. Se suele representar como el vector fijo equipolente situado en el origen.



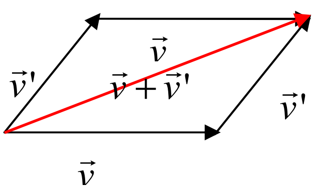
1.2. Operaciones con vectores libres

Veamos las operaciones más importantes con los vectores.

1.Suma

Es la operación interna desde el punto de vista de espacio vectorial. La suma de dos vectores $\vec{v}+\vec{v}'$=(x,y,z)+(x',y',z')=(x+x',y+y',z+z')

La interpretación geométrica de esta operación puede verse como el vector que resulta de prologar $\vec{v}'$ al extremo de $\vec{v}$, o por la regla del paralelogramo:



Puedes imaginarlo viendo la fuerza resultante de otras dos fuerzas (que son vectores) con distinta dirección (por ejemplo dos caballos arrastrando una barca cada uno por una orilla).

2.Producto escalar

Es la operación externa desde el punto de vista de espacio vectorial. El producto de un vector $\vec{v}$ por una constante λ es: $\lambda\cdot\vec{v}$=λ·(x,y,z)=(λx,λy,λz).

La interpretación gráfica es tal que si:

a) $\lambda>0$ es un vector con la misma dirección, sentido y con módulo $|\lambda\vec{v}|=|\lambda||\vec{v}|$

b) $\lambda<0$ es un vector con la misma dirección, sentido contrario y módulo $|\lambda\vec{v}|=|\lambda||\vec{v}|$

c) $\lambda=0$ el vector nulo (0,0,0)

1.3. Dependencia e independencia lineal. Base.

El concepto de linealmente independiente y dependiente es el mismo que el estudiado en el tema anterior. Así como el de base.

Recordemos que la dimensión de R^3 es 3, así que el número de vectores que forman la base sería de 3.

Al ser de dimensión 3, el número máximo de vectores linealmente independientes es 3, de manera que si tenemos 4 o más vectores, seguro que son linealmente dependientes.

Tres vectores son linealmente independientes si cumplen alguno de los siguientes requisitos:

a) $\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2+\lambda_3\vec{v}_3=0$ unica solución la trivial $\rightarrow\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$

b) $\vec{v}_1\neq\mu_2\vec{v}_2+\mu_3\vec{v}_3$, $\vec{v}_2\neq\mu_1\vec{v}_1+\mu_3\vec{v}_3$, $\vec{v}_3\neq\mu_1\vec{v}_1+\mu_2\vec{v}_2$

c) $\text{rang}(\begin{pmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{pmatrix})=3$

Dos vectores son linealmente independientes si cumplen alguno de los siguientes requisitos:

a) $\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2=0$ $\lambda_1=\lambda_2=0$

b) $\vec{v}_1\neq\mu_2\vec{v}_2$, $\vec{v}_2\neq\mu_1\vec{v}_1$

c) $\text{rang}(\begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \\ z & z' \end{pmatrix})=2$

1.4. Relación entre punto y vector. Coordenadas.

Para localizar un punto en el espacio necesitamos un sistema de referencia, es decir 3 rectas (generalmente perpendiculares) que se cortan en un punto llamado origen.

El sistema de referencia más utilizado es el ***sistema de referencia cartesiano***, este está formado por tres vectores unitarios (modulo 1) perpendiculares, que forman una base.

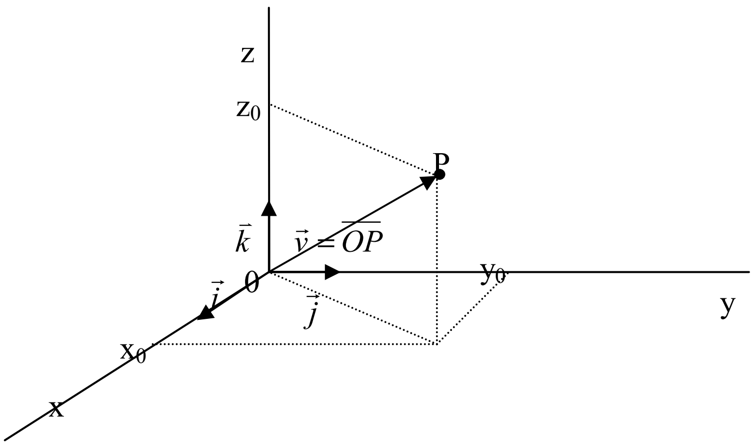
La notación usada es la siguiente: $\{0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$, siendo $\vec{i}=(1,0,0),\vec{j}=(0,1,0),\vec{k}=(0,0,1)$. En este sistema de referencia tenemos tres rectas o ejes cartesianos que contienen cada uno de los tres vectores. Estos ejes se denotan OX (eje de las x) que contiene a $\vec{i}$, OY (eje de las y) que contiene a $\vec{j}$ y OZ (eje de las Z) que contiene a $\vec{k}$.

<u>Coordenadas en un punto y un vector:</u>

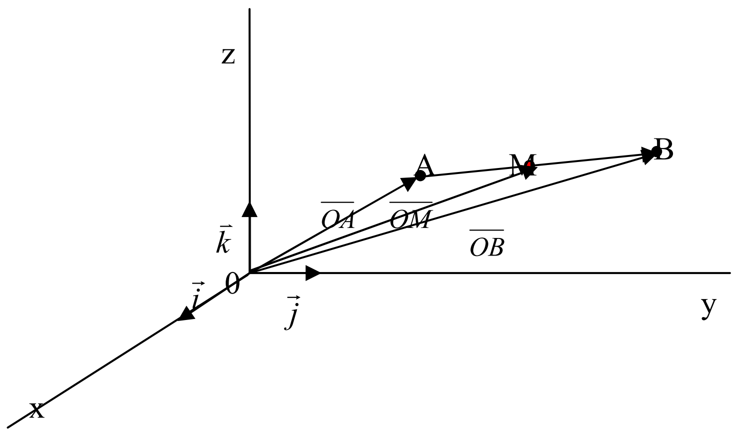
Todo punto en el espacio se puede determinar conociendo la posición que ocupan sus proyecciones sobre los ejes, es decir las coordenadas del punto. Los puntos se suelen denotar por letras mayúsculas → $P(x_0,y_0,z_0)$

Las coordenadas de un vector nos muestran el grado de avance de dicho vector en las tres direcciones del espacio, así $\vec{v}=(1,-2,0)$ implica una unidad de avance en el sentido positivo del eje X, 2 en el negativo del eje Y y no avanza en el eje Z

Se cumple que las coordenadas del punto P son las mismas que las coordenadas del vector $\vec{v}=\overline{OP}=(x_0-0,y_0-0,z_0-0)=(x_0,y_0,z_0)=x_0\vec{i}+y_0\vec{j}+z_0\vec{k}$



<u>Coordenadas del puno medio de un segmento:</u> Sea un segmento AB, con $A=(x_a,y_a,z_a)$ y $B=(x_b,y_b,z_b)$ los extremos del mismo. El punto medio M será el que está en el segmento y tal que la distancia de A a M sea la misma que de M a B. es decir $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MB}$. Para ver las coordenadas de M fijémonos en la siguiente figura:



$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AM}$ → $(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)=2(x_M-x_A,y_M-y_A,z_M-z_A)$. Luego las coordenadas del punto medio son:

$$\boxed{x_M=\frac{x_B+x_A}{2},\quad y_M=\frac{y_B+y_A}{2},\quad z_M=\frac{z_B+z_A}{2}}$$

Ejercicios :

Ejercicio 1.- Sean los puntos A=(2,3,5) y B=(1,0,8)

a) Hallar las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{AB}=(1-2,0-3,8-5)=(-1,-3,3)$ y $\overrightarrow{BA}=(2-1,3-0,5-8)=(1,3,-3)=$-$\overrightarrow{AB}$

b) Hallar dos puntos C y D tales que el vector $\overrightarrow{CD}$ sea equipolente al vector $\overrightarrow{AB}$

Tenemos que buscar dos puntos C y D tal que las coordenadas de $\overrightarrow{CD}$ sean (-1,-3,3). Fijando un punto obtendremos el otro. Por ejemplo si C=(0,0,0) D=(-1,-3,3).

c) Hallar el extremo F de un vector $\overrightarrow{EF}$ tal que sea equipolente a $\overrightarrow{AB}$, siendo E(-3,6,-9)

$\overrightarrow{EF}=(x+3,y-6,z+9)=(-1,-3,3)$ → E(-4,3,-6)

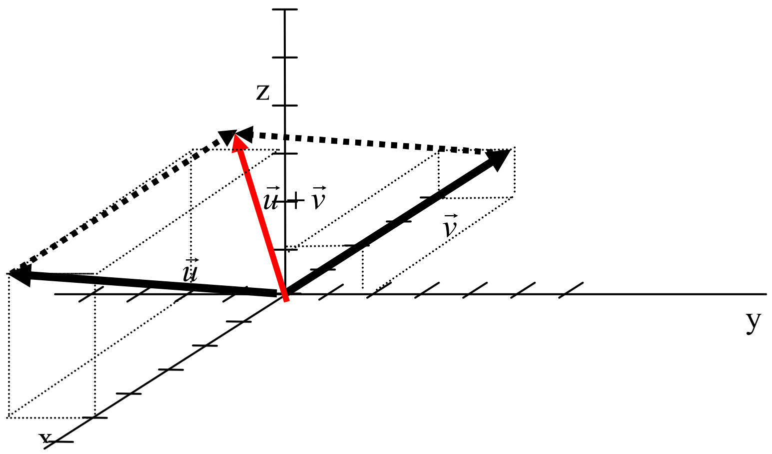
d) Halla el origen G de un vector fijo $\overrightarrow{GH}$ tal que sea equipolente a $\overrightarrow{AB}$, siendo H=(3,2,9)

$\overrightarrow{GH}=(3-x,2-y,9-z)=(-1,-3,3)$ → G(4,5,6)

Ejercicio 2.- Sean $\vec{u}=(5,-2,3)$ y $\vec{v}=(-4,2,1)$ dos vectores libres. Se pide:

a) Dibujar cada uno de ellos y su suma

$\vec{u}=(5,-2,3)$; $\vec{v}=(-4,2,1)$; $\vec{u}+\vec{v}=(1,0,4)$



b) ¿Cuál es el extremo de $\overrightarrow{AB}$ si $\overrightarrow{AB}$=$\vec{u}-\vec{v}$ y A=(0,2,0)?

$\overrightarrow{AB}=(x-0,y-2,z-0)=\vec{u}-\vec{v}=(5,-2,3)-(-4,2,1)=(9,-4,2)$ →B=(9,-2,2)

c) ¿Cuáles son las coordenadas del vector $2\vec{u}$ *y de* $3\vec{u}-5\vec{v}$?

$2\vec{u}=(10,-4,6)$ $3\vec{u}-5\vec{v}=(15+20,-6-10,9-5)=(35,-16,4)$

2. Ecuaciones de la recta en el espacio

Las rectas son variedades lineales de dimensión 1 (1 parámetro libre). Quedan determinadas por:

a) Un punto de la recta y un vector paralelo a ésta (vector director de la recta)

b) Dos puntos no coincidentes de la recta.

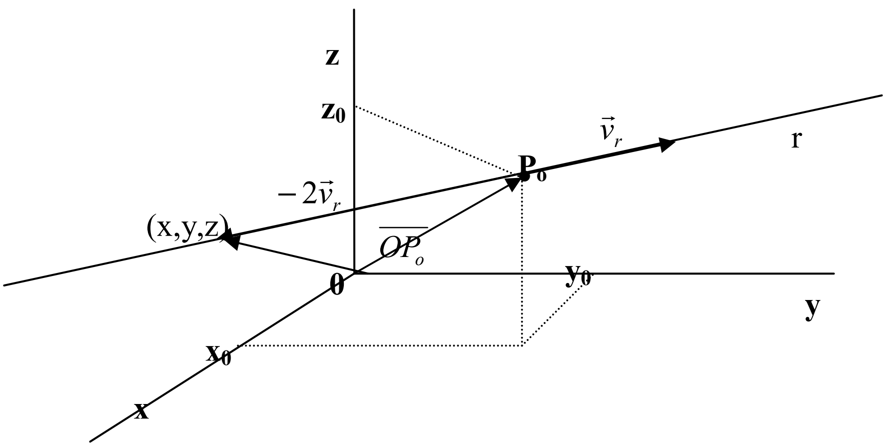
Formas de expresar la recta en el espacio:

1. Forma vectorial y cartesiana
2. Paramétricas
3. Ecuación continua
4. Ecuación general o como intersección de dos planos.

2.1. Ecuación vectorial:

Sea $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto cualquiera de la recta, y con vector director (todo vector paralelo a la recta) $\vec{v}=(v_x, v_y, v_z)$. La ecuación vectorial de la recta es:

$\vec{x}=\overrightarrow{0X}=\overline{OP_0}+\lambda\cdot\vec{v}$, o $(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+\lambda\cdot(v_x,v_y,v_z)$ con λ∈R (parámetro libre).



Ejemplo del punto de la recta (x,y,x) cuando λ=-2

2.2. Ecuaciones paramétricas:

Partiendo de la ecuación vectorial, operando e igualando coordenada a coordenada,

$$r:\begin{cases} x = x_0+\lambda\cdot v_x \\ y = y_0+\lambda\cdot v_y \\ z = z_0+\lambda\cdot v_z \end{cases} \quad \lambda\in R \text{ (parámetro libre)}$$

2.3. Ecuación en forma continua:

Despejando λ de las tres ecuaciones paramétricas e igualando, se obtiene la forma continua de la recta. $\boxed{r:\dfrac{x-x_0}{v_x}=\dfrac{y-y_0}{v_y}=\dfrac{z-z_0}{v_z}}$

Nota: cuando alguna o algunas de las coordenadas del vector director de la recta son nulas, la forma de representar la ecuación en continua se modifica para no dividir entre 0. Para ver como se modifica veamos el siguiente ejemplo: P(1,-4,3), $\vec{v}$=(1,-2,0)

$$r:\frac{x-1}{1}=\frac{y+4}{-2};z=3$$

2.4. Ecuación general o como intersección de dos planos:

Partiendo de la ecuación en forma continua, se resuelven las dos ecuaciones:

$$\begin{cases} v_y(x-x_0)=v_x(y-y_0) \\ v_z(x-x_0)=v_x(z-z_0) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} Ax \quad +By \qquad\quad =D \\ A'x \qquad\quad +C'z \quad =D' \end{cases}}$$

Como se verá en el apartado siguiente, se corresponde con las ecuaciones de 2 planos que se cortan en esta recta. Se cumple que el vector director de la recta es perpendicular de los vectores directores de los dos planos, y se obtiene con el producto vectorial de los vectores cuyas coordenadas son los coeficientes que multiplican a x, y, z de los dos planos:

$$\vec{v}=(A,B,0)\times(A',0,C')=(BC'-0\cdot 0,0\cdot A-AC',A\cdot 0-BA')$$

Como veremos existen infinitas parejas de planos cuya intersección es la misma recta.

2.5. Caso particular, conocido dos puntos de la recta:

Sean $A(x_0,y_0,z_0)$ y $B(x_1,y_1,z_1)$ dos puntos por los que pasa la recta. El vector director de la recta es $\vec{v}=(x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0)$. Con el punto A y el vector director $\vec{v}$ se puede escribir de cualquier forma la recta. Por ejemplo, la forma continua:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}$$

Ejemplo: Dada la recta $\begin{cases} x+3y-z=2 \\ 2x+y+z=1 \end{cases}$ en forma de intersección de dos planos, determina el vector director de la misma y un punto.

Vamos a expresar la recta en paramétricas, para ello tenemos que expresar dos variables en función de otra variable, podemos hacerlo por sustitución, igualación o reducción:

$$\begin{cases} z = x+3y-2 \\ z = 1-2x-y \end{cases} \rightarrow x+3y-2 = 1-2x-y \rightarrow \quad 3x+4y-3=0 \rightarrow \rightarrow x = \frac{-4y+3}{3} = -\frac{4}{3}y+1 \rightarrow$$

$z = \frac{-4y}{3}+1+3y-2 \rightarrow$ z $= \frac{5y}{3}-1$. Los valores de x, z son ciertos para cualquier valor de y. Llamando a y=λ obtendremos la recta en paramétricas:

$$\text{r:}\begin{cases} x = 1-\frac{4}{3}\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1+\frac{5}{3}\lambda \end{cases}. \quad \rightarrow \quad \text{r:}\begin{cases} x = 1-4\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -1+5\lambda \end{cases}.$$

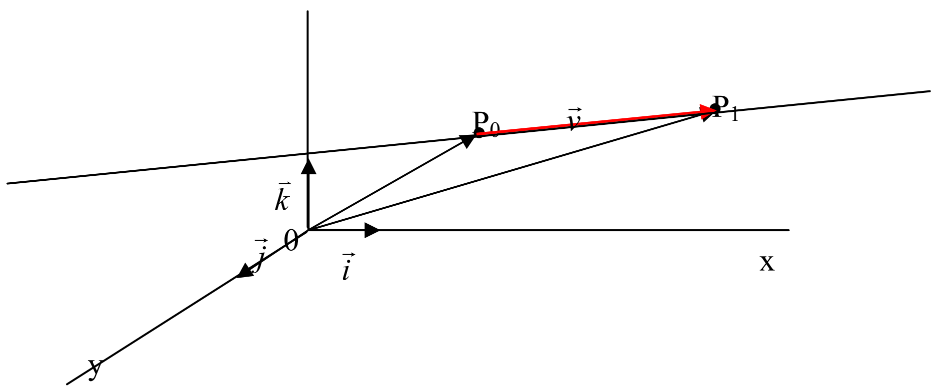
Así el vector director es $\left(\frac{-4}{3},1,\frac{5}{3}\right)$ o uno proporcional: $(-4,3,5)$. Un punto de la misma es, por ejemplo, $A(1,0,-1)$, que se obtiene haciendo que λ=0.

Comprobemos que el vector director es igual al producto vectorial de los vectores normales de los dos planos: (1,3,-1) × (2,1,1)=(3+1,-2-1,1-3·2)=(4,-3,-5), que es proporcional a $(-4,3,5)$

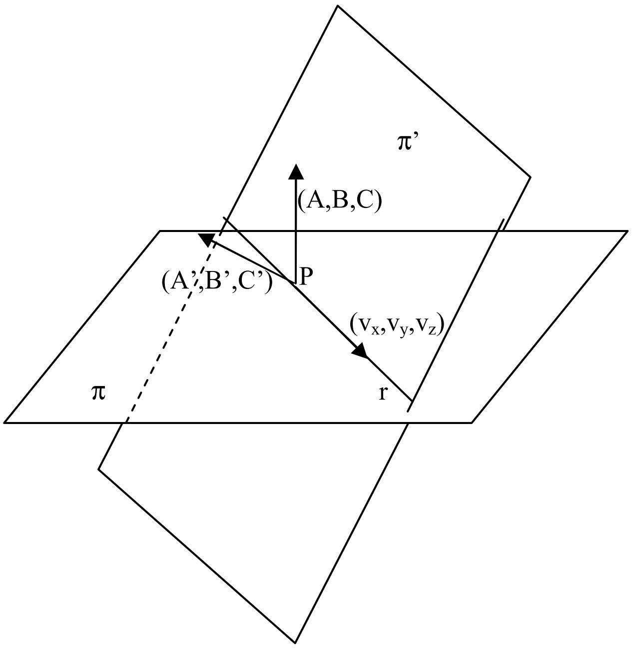
Otras 2 formas de obtener la ecuación en paramétricas son:

1) Calculando 2 puntos de la recta. Los puntos de la recta se obtienen resolviendo el sistema fijando un valor de x (o cualquiera de las variables).

2) Calculando un punto de la recta (de la forma indicada en 1) y el vector director mediante el producto vectorial de los vectores normales de los planos → v=(A,B,C) ×(A',B',C')



Gráfica de la recta como intersección por dos planos:



Ejercicio 3.- Expresa todas las ecuaciones de la recta, en todas sus formas posibles, sabiendo que pasa por el punto P_0 (1,-2,5) y tiene como vector director $\vec{v}$=(3,1,-2)

- Ecuación vectorial (x,y,z)=(1,-2,5)+λ(3,1,-2)

- Paramétricas: $\begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 5 - 2\lambda \end{cases}$

- En forma continua: $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-5}{-2}$

- General: $\begin{cases} x - 3y = 7 \\ 2x + 3z = 17 \end{cases}$

Ejercicio 4.- Expresa la ecuación de la recta en todas sus formas posibles, sabiendo que pasa por el punto P_0(1,-2,5) y por el punto P_1(-2,1,0).

A partir de los dos puntos podemos obtener un vector. Cogemos el punto P_0, y el vector $\overrightarrow{P_0P_1}$ =(-3,3,-5).

- Ecuación vectorial (x,y,z)=(1,-2,5)+λ(-3,3,-5)

- Paramétricas: $\begin{cases} x = 1 - 3\lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = 5 - 5\lambda \end{cases}$

- En forma continua: $\frac{x-1}{-3}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-5}{-5}$

-General o intersección de dos planos: $\begin{cases} x+y=-1 \\ 5x-3z=-10 \end{cases}$

Ejercicio 5.- Hallar las ecuaciones de la recta $\begin{cases} \mathbf{2x+y+z=2\ (1)} \\ \mathbf{x-y-2z=1\ (2)} \end{cases}$ en paramétrica y continua.

En forma paramétrica: resolvemos el sistema (compatible indeterminado) en función de la variable x:

(1)+(2) => 3x-z=3 → z=-3+3x

Sustituyendo en (1)→ y=5-5x.Llamando x=λ, la ecuación en paramétricas es:

$$r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=5-5\lambda \\ z=-3+3\lambda \end{cases}$$

Un punto de la recta es cuando λ=0; P=(0,5,3), y un vector director es $\vec{v}=(1,-5,3)$

Ejercicio 6.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto P(1,2,3) y tiene como vector director $\vec{v}=(6,5,4)$. Obtener 6 puntos que pertenezcan a la misma recta:

Ecuación vectorial (x,y,z)=(1+6λ,2+5λ,3+4λ)

Seis puntos:

λ=0	(1,2,3)
λ=1	(7,7,7)
λ=-1	(-5,-3,-1)
λ=2	(13,12,11)
λ=-2	(-11,-8,-5)

Ejercicio 7. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos P(1,1,0) y Q(1,0,1)

$\vec{v}=\overrightarrow{PQ}=(0,-1,1)$. Ecuación vectorial (x,y,z)=(1,1-λ,λ)

Ejercicio 8.- Estudia si los puntos A(3,-4,2), B(1,2,3) y C(-1,4,6) están alineados

La ecuación de la recta que pasa por A y B es $\frac{x-3}{1-3}=\frac{y+4}{2+4}=\frac{z-2}{3-2}$. El punto C estará alineado si pertenece a la recta, es decir, si se cumple la siguiente igualdad: $\frac{-1-3}{1-3}\neq\frac{4+4}{2+4}\neq\frac{6-2}{3-2}$. Como la igualdad no es cierta, C no pertenece a la recta que pasa por A y B, y por lo tanto, no están alineados.

Conclusión: 3 puntos están alineados si se cumple la igualdad: $\frac{x_1-x_2}{x_1-x_3}=\frac{y_1-y_2}{y_1-y_3}=\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}$

Ejercicio 9.-Una recta pasa por el punto P(3,1,2) y es paralela al vector $\vec{v}$=(1,-2,3). Comprueba que los puntos (4,-1,5), (2,3-1), (6,7,4), (0,1,3) y (6,-5,11) pertenecen a esta recta

Veamos la ecuación de la recta en continuas: $\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-2}{3}$.

Los demás puntos pertenecerán a la recta si sustituyendo los valores de x, y, z de los puntos en la anterior igualdad, ésta se cumple, comprobémoslo:

(4,-1,5)→ $\frac{4-3}{1}=\frac{-1-1}{-2}=\frac{5-2}{3}$ pertenece, (2,3,-1)→ $\frac{2-3}{1}=\frac{3-1}{-2}=\frac{-1-2}{3}$ pertenece, (6,7,4)→ $\frac{6-3}{1}\neq\frac{7-1}{-2}\neq\frac{4-2}{3}$ no pertenece, (0,1,3)→ $\frac{0-3}{1}\neq\frac{1-1}{-2}\neq\frac{3-2}{3}$ no pertence

(6,-5,11)→ $\frac{6-3}{1}=\frac{-5-1}{-2}=\frac{11-2}{3}$ pertenece.

Ejercicio 10.- Expresar las siguientes recta en todas las formas que conozcas

a) $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-4}{3}$

Un punto es P(2,2,4) y el vector director $\vec{v}=(1,-1,3)$ →

· Ecuación vectorial (x,y,z)=(2+λ,2-λ,4+3λ)

· Paramétricas $\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=4+3\lambda \end{cases}$

· Continua: $\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-4}{3}$

· General o intersección de dos planos: $\begin{cases} -x+2=y-2 \\ 3x-6=z-4 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y+x=4 \\ 3x-z=2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x-y-3z=1 \\ x-3y+z=5 \end{cases}$

Vamos a ver un método distinto al visto en la teoría. Buscamos dos puntos de la recta y, a partir de los mismos, obtenemos las ecuaciones paramétricas y vectoriales.

Ejemplos: si x=1 → $\left.\begin{matrix} -y-3z=0 \\ -3y+z=4 \end{matrix}\right\}$ y=-6/5, z=2/5. P(1,-6/5,2/5)

si x=0 → $\left.\begin{matrix} -y-3z=1 \\ -3y+z=5 \end{matrix}\right\}$ y=-8/5, z=1/5 Q(0,-8/5,1/5)

$\vec{v}=(1-0,-6/5+8/5,2/5-1/5)$=(1,2/5,1/5)→ (5,2,1)

· Ecuación vectorial (x,y,z)=(1+5λ,-6/5+2λ,2/5+λ)

· Paramétricas $\begin{cases} x=1+5\lambda \\ y=-6/5+2\lambda \\ z=2/5+\lambda \end{cases}$

· Continua: $\frac{x-1}{5}=\frac{y+6/5}{2}=\frac{z-2/5}{1}$

c) $\begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \\ z=3+2t \end{cases}$ → Un punto es P(2,1,3) y un vector $\vec{v}=(1,-1,2)$

· Vectorial: (x,y,z)=(2+λ,1-λ,3+2λ)

· Continua $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{2}$

· General o intersección de dos planos: $\begin{matrix} -x+2=y-1 \\ 2x-4=z-3 \end{matrix} \longrightarrow \left.\begin{matrix} y+x=3 \\ 2x-z=1 \end{matrix}\right\}$

Ejercicio 11.- Determinar el valor de m y n sabiendo que los puntos (1,2,0), (2,3,1) y (m,1,n) están alineados

$\frac{1-2}{1-m}=\frac{2-3}{2-1}=\frac{0-1}{0-n}$ → $\begin{cases} -1=-1+m \\ n=-1 \end{cases}$ → $\begin{matrix} m=0 \\ n=-1 \end{matrix}$

Ejercicio 12.- Halla las ecuaciones de las medianas del triángulo de vértices A(1,1,1), B(3,5,7) y C(0,3,0)

Calculemos la mediana del vértice C (el resto de medianas se hacen de igual forma):

M_c=punto medio AB=$(\frac{1+3}{2},\frac{1+5}{2},\frac{1+7}{2})=(2,3,4)$.

La mediana del punto C pasa por C(0,3,0) y M_c(2,3,4):

$\vec{v}=\overrightarrow{MC}=(2-0,3-3,4-0)=(2,0,4)$ → r:(x,y,z)=(0,3,0)+λ(2,0,4)

3. Ecuaciones del plano.

Un plano ∏ es una variedad lineal de dos dimensiones, y queda determinado por:

a) Un punto $P_0(x_0,y_0,z_0)$ y un vector perpendicular al plano $\vec{n}_\Pi=(A,B,C)$

b) Un punto $P_0(x_0,y_0,z_0)$ y 2 vectores paralelos al plano $\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$, $\vec{u}=(u_x,u_y,u_z)$ no proporcionales. $\vec{n}_\Pi=\vec{v}\times\vec{u}$

c) Tres puntos no coolineales $P_0(x_0,y_0,z_0)$, $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$. $\vec{v}=\overrightarrow{P_0P_1}$, $\vec{u}=\overrightarrow{P_0P_2}$

Veamos las tres formas de representar un plano en el espacio:

3.1. Ecuación vectorial

La ecuación vectorial de un plano que pasa por un punto $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ y tiene 2 vectores paralelos al plano $\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$, $\vec{u}=(u_x,u_y,u_z)$ no proporcionales es:

$$\pi:\overrightarrow{OX}=(x,y,z)=\overrightarrow{OP_0}+\lambda\vec{v}+\mu\vec{u}=(x_0,y_0,z_0)+\lambda(v_x,v_y,v_z)+\mu(u_x,u_y,u_z)$$

3.2. Ecuaciones paramétricas

Consiste en separar la ecuación vectorial en coordenadas

$$\pi:\begin{cases} x=x_0+\lambda\cdot v_x+\mu\cdot u_x \\ y=y_0+\lambda\cdot v_y+\mu\cdot u_y \\ z=z_0+\lambda\cdot v_z+\mu\cdot u_z \end{cases}$$

3.3. Ecuación general o implícita

Eliminando λ y μ de dos de las tres ecuaciones de las paramétricas y sustituyendo en la tercera ecuación, obtenemos la ecuación general: Ax+By+Cz=D. Esta ecuación se obtiene de desarrollar el siguiente determinante:

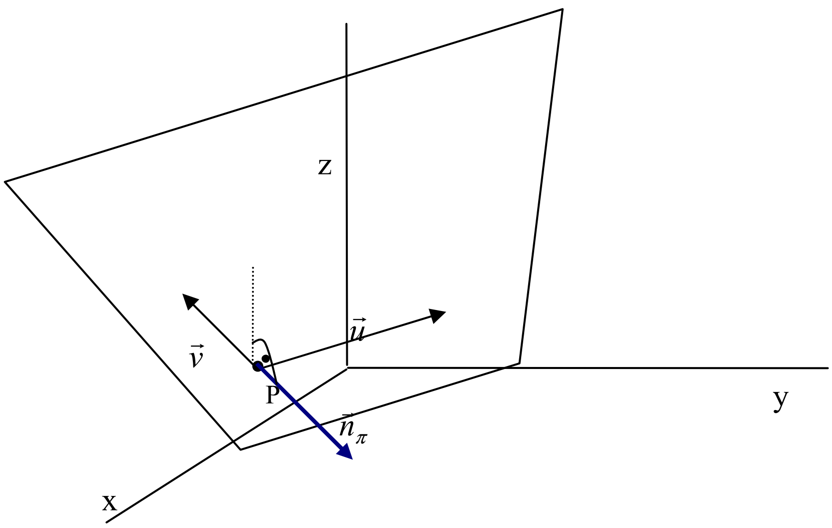
$$\pi\equiv\begin{vmatrix} x-x_0 & v_x & u_y \\ y-y_0 & v_y & u_y \\ z-z_0 & v_z & u_z \end{vmatrix}=0$$

Otra forma es obtener A, B, y C, que son las coordenadas de un vector perpendicular $\vec{v}\times\vec{u}=(A,B,C)$. Conociendo A, B y C podemos obtener D obligando a que el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ pertenezca al plano: $Ax_0+By_0+Cz_0=D$.

Para conocer D también podemos calcularla a partir de la ecuación

π: $A\cdot(x-x_0)+B\cdot(y-y_0)+C\cdot(z-z_0)=0$

Gráfica de un plano, sus vectores directores y vector normal:



3.4. Caso particular conociendo tres puntos del plano

A partir de tres puntos no colineales del plano, podemos obtener la ecuación de la siguiente forma: Dejamos un punto fijo y obtenemos los dos vectores directores con origen el punto fijado y extremos los otros dos.

Si los puntos son P_0, P_1 y P_2 un punto del plano es P_0, y dos vectores directores $\vec{v} = \overrightarrow{P_0P_1}$ y $\vec{u} = \overrightarrow{P_0P_2}$. También podemos obtener el vector normal al plano $\vec{n}_\Pi = (A,B,C) = \overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2}$

Ejemplos:

1. Expresar las ecuaciones del plano determinado por los puntos $P_0(1,2,3)$ y los vectores directores $\vec{v}$=(1,0,1) y $\vec{u}$=(1,1,0):

   - Vectorial: π : (x,y,z)=(1,2,3)+λ(1,0,1)+μ(1,1,0)

   - Paramétrica π: $\begin{cases} x = 1+\lambda+\mu \\ y = 2+\mu \\ z = 3+\lambda \end{cases}$

   - General: $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y-2 & 1 & 0 \\ z-3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ π: x-y-z+4=0

   Otra forma $\vec{v} \times \vec{u}$=(1,0,1)x(1,1,0)=(-1,1,1)=(A,B,C) → π:-x+y+z+D=0

   Pasa por $P_0(1,2,3)$ → -1+2+3+D=0 → D=-4 →π:-x+y+z-4=0

2. Hallar las ecuaciones del plano que pasan por los puntos A(3,2,-1), B(0,-2,5) y C(-2,4,-1).

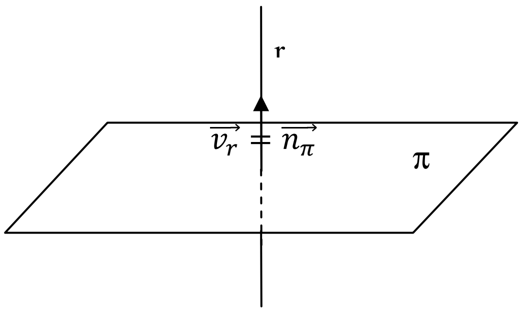
   Lo primero es obtener dos vectores directores. Dejaremos fijo el punto A(3,2,-1) y así $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(-3,-4,6)$ y $\vec{v}=\overrightarrow{AC}=(-5,2,0)$.

   - Vectorial π: (x,y,z)=(3,2,-1)+λ(-3,-4,6)+μ(-5,2,0)

   - Paramétricas π: $\begin{cases} x = 3 - 3\lambda - 5\mu \\ y = 2 - 4\lambda + 2\mu \\ z = -1 + 6\lambda \end{cases}$

   - Implícita o general: π: $\begin{vmatrix} x-3 & -3 & -5 \\ y-2 & -4 & 2 \\ z+1 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 6x + 15y + 13z - 35 = 0$

3. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto (0,0,1) y es perpendicular a la recta r: $\frac{x-2}{3}=\frac{y+5}{1}=\frac{z-3}{-1}$.



   Tenemos que el vector director de la recta es (3,1,-1), que es igual al vector normal del plano $\vec{n}_\Pi$ =(3,1,-1). Luego el plano tendrá por ecuación general la siguiente expresión:

   3x+y-z+D=0. Como pasa por (0,0,1)→ 0+0-1+D=0→ D=1 y la ecuación general del plano es π: 3x+y-z+1=0

   Para ponerlo en paramétricas despejamos una variable en función de las otras dos: z=3x+y+1, llamando x=λ e y=μ obtenemos la ecuación en paramétricas:

   $\pi: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 1 + 3\lambda + \mu \end{cases}$

   Luego dos vectores directores son $\vec{u}=(1,0,3)$ y $\vec{v}=(0,1,1)$ (se cumple que $\vec{u}\times\vec{v}=(-3,-1,1)$ que es proporcional a $\vec{n}_\Pi$ =(3,1,-1).

4. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos P(0,1,-2), Q(2,-1,1) y tiene como vector director $\vec{u}=(1,0,3)$ Hallar otros dos puntos

   Podemos obtener el segundo vector director a partir de los dos puntos $\vec{v}=\overrightarrow{PQ}=$ $=(2,-2,3)$. De esta forma la ecuación vectorial es:

   π: (x,y,z)= (0,1,-2)+λ(1,0,3)+μ(2,-2,3).

Los puntos se obtienen dando valores a λ y μ. Ejemplos:

(λ=1, μ=0)→ (1,1,1); (λ=0, μ=1)→ (2,-1,1)

Ejercicio 13.- Halla la ecuación de los planos determinados por las siguientes condiciones:

a) Plano que pasa por el punto P(2,-3,5) y tiene como vectores directores $\vec{u}=(1,1,2)$ y $\vec{v}=(3,-2,1)$

π: (x,y,z)=(2,-3,5)+λ(1,1,2)+μ(3,-2,1)

b) Plano que pasa por los puntos P(3,-1,0) y Q(1,-1,3) y contiene al vector $\vec{v}=(1,2,3)$

π: (x,y,z)=(3,-1,0)+λ(1-3,-1+1,3-0)+μ(1,2,3)= (3,-1,0)+λ(-2,0,3)+μ(1,2,3)

c) Plano que pasa por los puntos A(1,2,3), B(-1,0,2), C(2,-1,0)

π: (x,y,z)=(1,2,3)+λ(-2,-2-1)+μ(1,-3,-3)

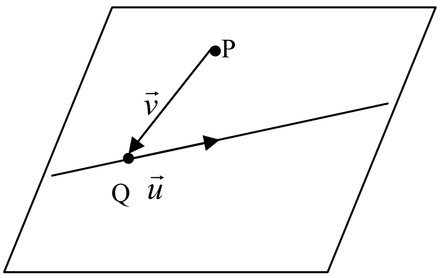
Ejercicio 14.- Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto P(2,-4,0) y contiene a la recta $r: \frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-4}{3}$

Si contiene a la recta, el vector director de la misma es vector director del plano, pero todavía nos faltaría otro vector director. Podemos tomar un punto de la recta y formar otro vector director con el otro punto que nos dan (no podemos hacer lo mismo con dos puntos de la recta ya que sería un vector director proporcional al otro vector de la recta).

$\vec{v}=(1,-1,3)$

Q(2,2,4) → $\vec{u}=\overrightarrow{PQ}=(0,6,4)$

Con esto la ecuación del plano será (x,y,z)=(2,-4,0)+λ(1,-1,3)+μ(0,6,4)



Ejercicio 15.- Escribir las ecuaciones paramétricas del plano π: 3x-y+2z=10

π: 3x-y+2z=10. Tenemos que resolver la ecuación, es decir, poner una variable en función de las otras dos: y=3x+2z-10. x=λ, z=μ:

$$\pi: \begin{cases} x=\lambda \\ y=3\lambda+2\mu-10 \\ z=\mu \end{cases}$$

Ejercicio 16.- Prueba que la recta r:$\begin{cases} x-y+z=4 \\ 3x+3y+7z=6 \end{cases}$ y s: $\frac{x-3}{5}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{-3}$ representan a la misma recta

Vamos a poner una expresiones en forma paramétricas y obtener 2 puntos, y si estos pertenecen a la otra recta, serán la misma recta.

$$s:\begin{cases} x=3+5\lambda \\ y=-1+2\lambda \\ z=-3\lambda \end{cases}$$

Veamos si hay dos puntos iguales en las dos rectas:

λ=0 → (3,-1,0) $\frac{3-3}{5}=\frac{-1+1}{2}=\frac{0}{-3}$, pertenece a las dos rectas

λ=1 → (8,1,-3) $\frac{8-3}{5}=\frac{1+1}{2}=\frac{-3}{-3}$, pertenece a las dos rectas

Luego son la misma recta.

Ejercicio 17.- Sean las rectas r: $\begin{cases} x=3-5t \\ y=1+2t \\ z=3 \end{cases}$ y s: $\begin{cases} 3x-y+z=0 \\ x+2y-z=2 \end{cases}$. Halla la ecuación del plano que pasa por r y es paralelo a s. Hallar la intersección de este plano con los ejes coordenados.

Podemos obtener dos vectores directores a partir de las dos rectas, y el punto del plano ser un punto de r:

De la primera recta tenemos el vector director (-5,2,0) y el punto (3,1,3).

De la segunda recta podemos hallar el vector director a partir del producto vectorial de los vectores normales a los planos que la intersectan:

(3,-1,1)×(1,2,-1)=(-1,4,7)

La ecuación vectorial es entonces π: (x,y,z)=(3,1,3)+λ(-5,2,0)+μ(-1,4,7)

Para ver la intersección con los ejes pongamos la ecuación en forma algebraica:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-3 & -5 & -1 \\ y-1 & 2 & 4 \\ z-3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi \equiv 14x+35y-18z+49=0$$

Corte eje X (y=z=0)→ x=-49/14 (-49/14,0,0)

Corte eje Y (x=z=0)→ y=-49/35 (0,-49/35,0)

Corte eje Z (x=y=0)→ z=49/18 (0,0,49/18)

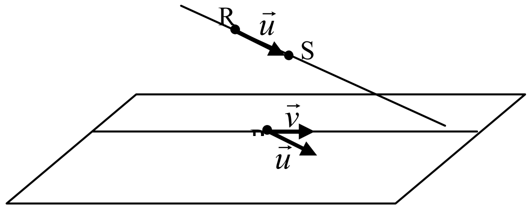
Ejercicio 18.- Halla la ecuación del plano que contiene a la recta de ecuación $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$ y es paralela a la recta que pasa por los puntos R(2,0,0) y S(0,1,0)

La recta $r \equiv \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{1}$ pasa por P(1,1,0) y $\vec{v} = (1,2,1)$ que son, respectivamente, un punto y un vector director del plano.

El plano es paralelo al vector que pasa por los punto R(2,0,0) y S(0,1,0). Luego otro vector director del plano es el que une los dos puntos $\overrightarrow{RS} = \vec{u} = (-2,1,0)$.

A partir de los datos anteriores tenemos que el plano vendrá definido por la siguiente ecuación en paramétricas:

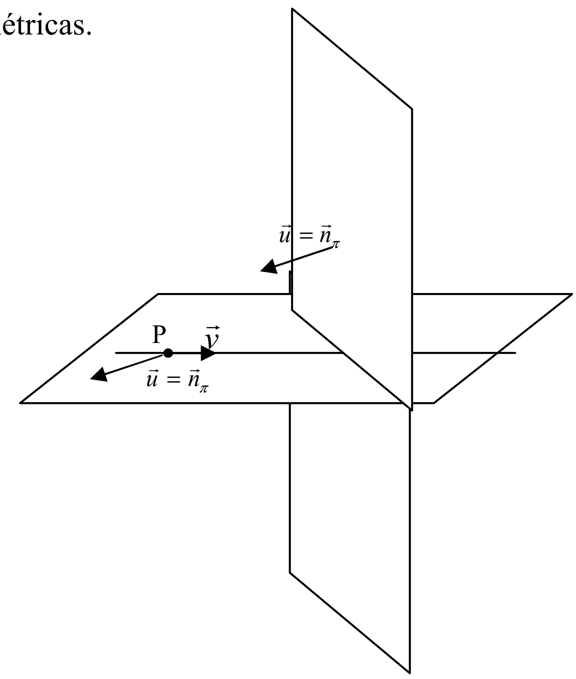
$$\Pi \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda - 2\mu \\ y = 1 + 2\lambda + \mu \\ z = \lambda \end{cases}$$



Ejercicio 19.-Dados el plano π:2x-3y+z=0 y la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$ halla la ecuación del plano que contiene a la recta r y es perpendicular a π

$r \equiv \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$ pasa por P(1,2,-1) y $\vec{v} = (1,-1,2)$ que son respectivamente un punto y un vector director de la recta r y del plano que buscamos. Por otro lado el vector normal al plano ∏, $\vec{n}_\pi = (2,-3,1)$, es un vector director del plano que buscamos ∏', pues este vector es paralelo al plano ∏'. Luego otro vector director del plano que buscamos es $\vec{u} = \vec{n}_\pi = (2,-3,1)$. A partir de estos datos tenemos que la ecuación del plano en paramétricas.

$$\Pi' \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda + 2\mu \\ y = 2 - \lambda - 3\mu \\ z = -1 + 2\lambda + \mu \end{cases}$$



4. Posiciones relativas

4.1. Dos planos

Sean dos planos ∏ y ∏’ de ecuaciones generales:

∏≡Ax+By+CZ=D

∏’≡A’x+B’y+C’Z=D’

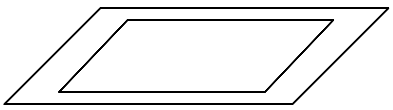
Analizar las posiciones relativas de estos planos consiste en ver si se cortan, son paralelos o coincidentes. Podemos realizar el estudio a partir del teorema de Rouche-Fröbenius, estudiando el rango de A, matriz de los coeficientes del sistema, y de A^*, matriz de la ampliada del mismo sistema.

$$A=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} \quad A^*=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix}$$

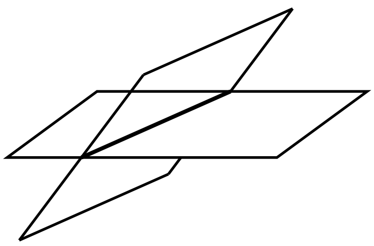
Según los rangos tenemos los casos siguientes:

rang(A)	rang(A*)	Soluciones	Posición relativa	Relación coeficientes
1	1	Infinitas 2 parámetros libre	Coincidentes, ∏=∏’ (2 parámetros libres)	$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}=\frac{D}{D'}$
2	2	Infinitas 1 parámetro libre	Se cortan en una recta (1 parámetro libre)	$\frac{A}{A'}\neq\frac{B}{B'}\, y/o\, \frac{A}{A'}\neq\frac{C}{C'}$
1	2	No solución	Son planos paralelos	$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}\neq\frac{D}{D'}$

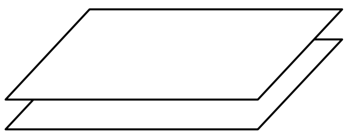
a) Coincidentes



b) Se cortan en una recta



c) Paralelos



Ejemplo: Estudia la posición relativa de los siguientes planos:

a) ∏≡ x+y-2z+2=0

∏≡ 2x+2y-4z+5=0

Son paralelos pues $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=\frac{-2}{-4}\neq\frac{2}{5}$ y, por lo tanto, el rang(A)=1 y rang(A^*)=2

b) ∏≡ x-2y+z=0

∏≡ x-2y-z-3=0

Se cortan en una recta pues $\frac{1}{1}\neq\frac{1}{-1}$ y por tanto rang(A)=rang(A^*)=2. La ecuación de la recta es $r\equiv\begin{cases}x-2y+z=0\\ x-2y-z=3\end{cases}$

4.2. Posición relativa de tres planos

Sean tres planos ∏, ∏' y ∏'' cuyas ecuaciones generales son las siguientes:

∏≡Ax+By+CZ=D

∏'≡A'x+B'y+C'Z=D'

∏'≡A''x+B''y+C''z=D'

Para estudiar las posiciones relativas de estos tres planos aplicamos el teorema de Rouche-Froubenius para el sistema, siendo A y A^* las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}A & B & C\\ A' & B' & C'\\ A' & B' & C'\end{pmatrix}\quad A^*=\begin{pmatrix}A & B & C & D\\ A' & B' & C' & D'\\ A'' & B'' & C'' & D''\end{pmatrix}$$

Según los rangos tenemos los casos siguientes:

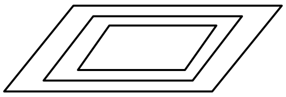
rang(A)	rang(A*)	Soluciones	Posición relativa
1	1	Infinitas 2 parámetros libre	a) Los 3 coincidentes ∏=∏'=∏'' (2 parámetros libres)
2	2	Infinitas 1 parámetro libre	b) Se cortan los 3 en una recta o c) 2 coincidentes y el 3º les corta (*)
1	2	No solución	d) Son planos paralelos o e) dos paralelos y otro coincidente(**)
2	3	No solución	f) Los planos se cortan 2 a dos o g) dos o son paralelos y el otro les corta (***)
3	3	Solución única	h) Son planos secantes en un punto

(*) se comprueba si dos de ellos son coincidentes, es decir, si sus coeficentes y el térmno independiente resulta ser proporcionales.

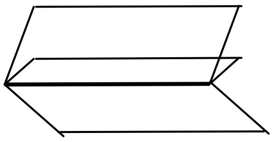
(**) Se comprueba a partir de los coeficientes de los planos si son todos paralelos, o si alguno es coincidente a otro (dos ecuaciones proporcionales).

(***) Se comprueba a partir de los coeficientes si dos de ellos son paralelos o no.

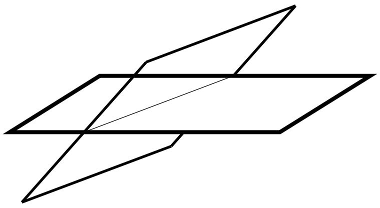
a) Coincidentes en un plano



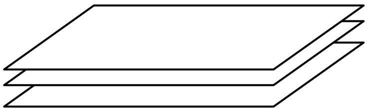
b) Se cortan en una recta



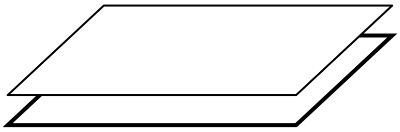
c) Dos coincidentes y el otro les corta



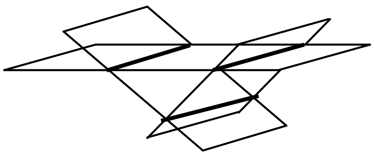
d) Tres planos paralelos



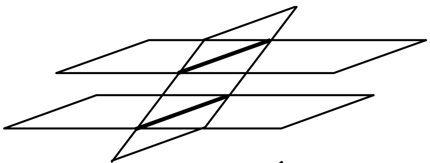
e) Dos coincidentes y el otro paralelo



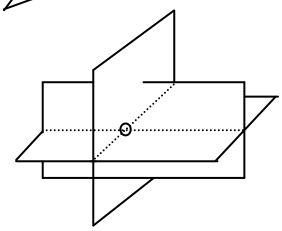
f) Se cortan dos a dos



g) Dos paralelos y el otro secante



h) Secantes en un punto



Ejemplo: Estudia la posición relativa de los siguientes tres planos

a) $\begin{cases} \Pi \equiv x - y + z = 0 \\ \Pi' \equiv 3x + 2y - 2z = 1 \\ \Pi'' \equiv 5x = 1 \end{cases}$ A= $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

rang(A)=2 rang(A')=2.

Además ningún plano es coincidente con otro (no son proporcionales los coeficientes), luego son tres planos coincidentes en una recta cuya ecuación en forma general:

$$r \equiv \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 5x = 1 \end{cases}$$

b) $\begin{cases} \Pi \equiv x + 3y - 2z = 0 \\ \Pi' \equiv 2x - y + z = 0 \\ \Pi'' \equiv 4x - 5y - 3z = 0 \end{cases}$ A= $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & -5 & -3 \end{pmatrix}$ $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

rang(A)=rang(A^*)=3→ cortan en un punto.

Para ver el punto debemos resolver el sistema. Si nos fijamos bien tenemos un sistema homogeneo, luego la solución es x=y=z=0, es decir, los tres planos se cortan en el origen (0,0,0)

c) $\begin{cases} \Pi \equiv x + 3y - 2z = 1 \\ \Pi' \equiv 2x - y + z = 1 \\ \Pi'' \equiv 3x + 2y - z = -2 \end{cases}$ A= $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

rang(A)=2, rang(A^*)=3.

No tienen puntos en común. Pueden ser dos casos, o se cortan dos a dos o dos son paralelos y el otro corta a los otros dos. En este caso como los coeficientes de x, y, z no son proporcionales en ninguna pareja de planos, entonces no son paralelos y por lo tanto se cortan dos a dos.

4.3. Posición relativa de una recta y un plano

Consideremos la recta expresada como intersección de dos planos, y el plano de forma implícita:

$$r \equiv \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \end{cases}$$

$$\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$$

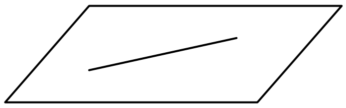
$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A & B & C \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A & B & C & D \end{pmatrix}$$

Haciendo uso del teorema de Rouche-Rröbenius, y estudiando el rango de A y de A^* , tendremos las siguientes posiciones relativas

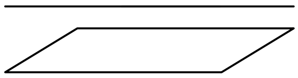
rang(A)	rang(A*)	Soluciones	Posición relativa
2	2	Infinitas 1 parámetro libre	La recta contenida en el plano
2	3	No solución	Recta y plano son paralelos
3	3	1 solución	Se cortan en un punto

Nota: no puede ocurrir que rang(A)=1, pues entonces los dos planos que definen la recta r sería paralelos o coincidentes, y por tanto no describirán tal recta.

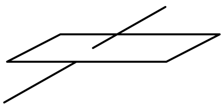
a) Recta contenida en el plano



b) Recta y plano son paralelos



c) Se cortan en un punto



Ejemplos

a)

$$r:\begin{cases}2x-y=3\\ x-z=1\end{cases}\quad A=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&0&-1\\1&1&-3\end{pmatrix}\quad A^*=\begin{pmatrix}2&-1&0&3\\1&0&-1&1\\1&1&-3&1\end{pmatrix}$$
$$\Pi: x+y-3z=1$$

rang(A)=2 y rang(A^*)=3 → son paralelos

b)

$$r:\begin{cases}3x-5z=3\\ z=0\end{cases}\quad A=\begin{pmatrix}3&0&-5\\0&0&1\\5&-7&0\end{pmatrix}\quad A^*=\begin{pmatrix}3&0&-5&3\\0&0&1&0\\5&-7&0&-3\end{pmatrix}$$
$$\Pi: 5x-7y=-3$$

rang(A)=rang(A^*)=3 → se corta en un punto

Resolviendo el sistema tenemos que x=1, y=8/7 z=0. Luego el punto intersección es P(1,8/7,0)

4.4. Posición relativa de dos rectas

Considerando dos rectas expresadas en forma general, como intersección de dos planos:

$$r_1 : \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + = D_1 \\ A'_1\, x + B'_1\, y + C'_1\, z = D'_1 \end{cases}$$

$$r_2 : \begin{cases} A_2 x + B_2 y + C_2 z + = D_2 \\ A'_2\, x + B'_2\, y + C'_2\, z = D'_2 \end{cases}$$

Las posiciones relativas de dos rectas en el espacio pueden ser las siguientes, según el valor del rango de A y de A^*

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A'_1 & B'_2 & C'_2 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A'_2 & B'_2 & C'_2 \end{pmatrix} \text{ y } A^*=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A'_1 & B'_1 & C'_1 & D'_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A'_2 & B'_2 & C'_2 & D'_2 \end{pmatrix}$$

rang(A)	rang(A*)	Soluciones	Posición relativa
2	2	Infinitas 1 parámetro libre	Los 2 rectas son coincidentes
2	3	No solución	Son paralelas
3	3	1 solución	Se cortan en un punto
3	4	No solución	Se cruzan en el espacio

Otra forma de ver su posición relativa más sencillamente, es a partir de estudiar el rango de los siguientes 3 vectores:

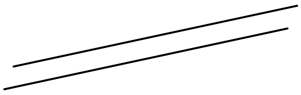
$\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$ vector director de la recta r_1

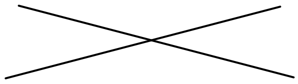
$\vec{u}=(u_x,u_y,u_z)$ vector director de la recta r_2

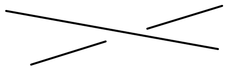
$\overrightarrow{PQ}=(w_x,w_y,w_z)$ vector que une un punto P de r_1 con otro Q de r_2

rang($\vec{v},\vec{u}$)	rang($\vec{v},\vec{u},\overrightarrow{PQ}$)	Soluciones	Posición relativa
1	1	Infinitas 1 parámetro libre	Los 2 rectas son coincidentes
1	2	No solución	Son paralelas
2	2	1 solución	Se cortan en un punto
2	3	No solución	Se cruzan en el espacio

a) Coincidentes 

b) Paralelas 

c) Se cortan en un punto 

d) Se cruzan 

E*jemplos*: Estudia las posiciones relativas de las siguientes dos rectas

a)

$$r_1:\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y=3 \end{cases} \quad r_2:\begin{cases} x-2y+z=0 \\ x-2y-z=3 \end{cases} \quad A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad A^*=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

rang(A)=rang(A^*)=3, se cortan en un punto. Estudiando la solución por Cramer (eliminando 1 ecuación) es x=3/2, y=0, z=-3/2. Luego el punto de corte es R(3/2,0,-3/2).

Vamos a hacerlo a partir de la ecuación en paramétricas:

$r_1 \rightarrow$ y=3-2x, z=3-2x-x=3-3x $\rightarrow \begin{cases} x=\lambda \\ y=3-2\lambda \\ z=3-3\lambda \end{cases} \rightarrow$ P(0,3,3), $\vec{u}$=(1,-2,-3)

$r_2 \rightarrow$ restando las 2 ecuaciones z=-3/2,x=3/2+2y $\begin{cases} x=3/2+2\mu \\ y=\mu \\ z=-3/2 \end{cases}$ Q(3/2,0,-3/2), $\vec{v}$=(2,1,0)

Veamos la relación de incidencia a partir de lo siguientes rangos:

rang($\vec{u},\vec{v}$)=$rang\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$=2 rang($\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{PQ}$)=rang$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1/2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}$=2

El punto de corte se hace igualando x, y, z de las dos rectas:

$$\begin{cases} (1)\ \lambda=3/2+2\mu \\ (2)\ 3-2\lambda=\mu \\ (3)\ 3-3\lambda=-3/2 \end{cases} \rightarrow \text{De (3) } \lambda=3/2\text{, sustituyendo en (1) o en (2) } \mu=0$$

Luego sustituyendo λ en r_1 o μ en r_2 → x=3/2, y=0, z=-3→ R(3/2,0,-3/2)

b) Las rectas:

$$r_1 \equiv \begin{cases} x=-1+3\lambda \\ y=3+\lambda \\ z=-4+10\lambda \end{cases} \quad r_2 \equiv \frac{x-2}{6}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-6}{20}$$

de la recta r_1→ P(-1,3,-4), $\vec{u}=(3,1,10)$

de la recta r_2→ Q(2,4,6), $\vec{v}=(6,2,20)$

Estudiando los rangos obtenemos la relación afín de ambas rectas:

$$\text{rang}(\vec{u},\vec{v})=\text{rang}\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \\ 10 & 20 \end{pmatrix}=1,\ \text{rang}(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{PQ})=\text{rang}\begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 10 & 20 & 10 \end{pmatrix}=1 \rightarrow \text{misma recta.}$$

Ejercicio 20.- Determinar la posición relativa de las rectas r: x=-y=-z y s: z=2, y=x+2

r:→ $\vec{v}=(1,-1,-1),\ P(0,0,0)$

$$s \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda+2 \\ z=2 \end{cases} \rightarrow \vec{u}=(1,1,0),\ Q(-2,0,2)$$

$\overrightarrow{PQ}=(-2,0,2)$

$$\text{rang}(\vec{u},\vec{v})=\text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=2$$

$$\text{rang}(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{PQ})=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}=3$$

Si rang$(\vec{u},\vec{v})$=2 y rang$(\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{PQ})$=3, entonces las dos rectas se cruzan.

Ejercicio 21.- Determinar el valor de m y de n para que los planos que tienen como ecuaciones $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - y + z = 2 \\ 3x - y - mz = n \end{cases}$ se corten en una recta.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -m \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -m & n \end{pmatrix}$$

Estudiar la posición relativa de los tres planos no es sencillo al haber dos parámetros, lo que sí es más fácil es obligar a que los tres planos se corten en una recta:

rang(A)=rang(A^*)=2 y que ningún plano sea coincidente.

rang(A)=2 → |A|=m+1=0 → m=-1

rang(A^*)=2 entonces se tienen que anular todos los menores de orden 3 (con m=1):

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & n \end{vmatrix} = 4 - n = 0 \rightarrow n=4 \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & n \end{vmatrix} = -4 + n = 0 \rightarrow n=4 \quad \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ n & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Luego, si n=4, todos los menores de orden tres se anulan, y por lo tanto rang(A^*)=2.

Ejercicio 22.- Sea la recta r: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+8}{3} = \frac{z-2}{5}$, el plano π: 2x-y+3z=1 y el punto P(1,0,4), obtén una recta s que sea paralela a r y que pase por el punto P. Calcula la intersección entre s y π.

a) El vector director de la recta buscada es el mismo que r al ser paralelas $\vec{v} = (2,3,5)$, y como pasa por el punto P(1,0,4) → s: (x,y,z)=(1,0,4)+λ(2,3,5).

b) Veamos la intersección con el plano π:2x-y+3z=1. Sustituyendo en la ecuación de π las ecuaciones en paramétricas de la recta tendremos el valor de λ, a partir del cual podemos obtener el punto de corte:

2(1+2λ)-3λ+3(4+5λ)=1 → 16λ=-13 → λ=-13/16 →

x_0=1+2(-13/16)=-5/8

y_0=3(-13/16)=-39/16

z_0=4+5(-13/16)=-1/16

Luego el punto de corte es (-5/8,-39/16,-1/16)

Ejercicio 23.- Hallar la ecuación del plano que contiene a las rectas r:$\begin{cases} x-y-3z=1 \\ x-3y+z=5 \end{cases}$ y s:$\begin{cases} 2x+3y-z=1 \\ x-y+3z=4 \end{cases}$

Tenemos 3 posibilidades:

1. Son paralelas: tomamos el vector director de una de las rectas (que son proporcionales) y obtenemos el otro vector director del plano a partir de dos puntos, uno de cada recta.
2. Se cortan, los vectores directores de las dos rectas no son proporcionales, y por lo tanto son los dos vectores directores del plano buscado.
3. Se cruzan, y entonces no existe ningún plano que pase por las dos rectas

Para ver en cuál de las 3 situaciones nos encontramos estudiemos el rango de los dos vectores directores y de los mismos y el vector que se obtiene de unir un punto de cada recta. Para ver los vectores directores de las rectas y alguno de sus puntos pasemos las ecuaciones a paramétricas:

r→ restando las dos ecuaciones (1)-(2) 2y-4z=-4 → z=y/2+1. Sustituyendo en (1) x=1+y+3(y/2+1)=4+5/2y. De esta forma r en paramétricas

$$\text{r:}\begin{cases} x=4+\frac{5}{2}\lambda \\ y=\lambda \\ z=\frac{\lambda}{2}+1 \end{cases} \longrightarrow \vec{v}=(\frac{5}{2},1,\frac{1}{2})\equiv(5,2,1),\ P(4,0,1)$$

s→ (1)-2(2): 5y-7z=-7 z=5/7y+1. sustituyendo en (2) x=4-3(5/7y+1)+y=-8/7y+1

$$\text{r:}\begin{cases} x=1-\frac{8}{7}\lambda \\ y=\lambda \\ z=\frac{5\lambda}{7}+1 \end{cases} \longrightarrow \vec{u}=(-\frac{8}{7},1,\frac{5}{7})\equiv(-8,7,5),\ Q(1,0,1)$$

$$\overline{PQ}=(-3,0,0)$$

$$\text{rang}(\vec{u},\vec{v})=2$$

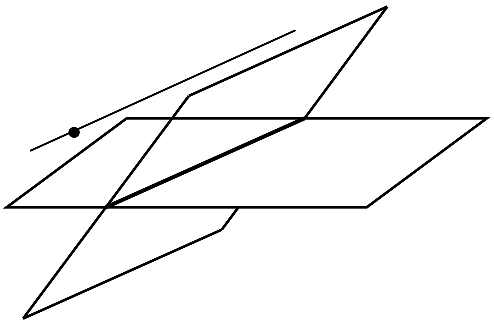
$$\text{rang}(\vec{u},\vec{v},\overline{PQ})=3$$

Se cruzan y, entonces no hay ningún plano que las contenga

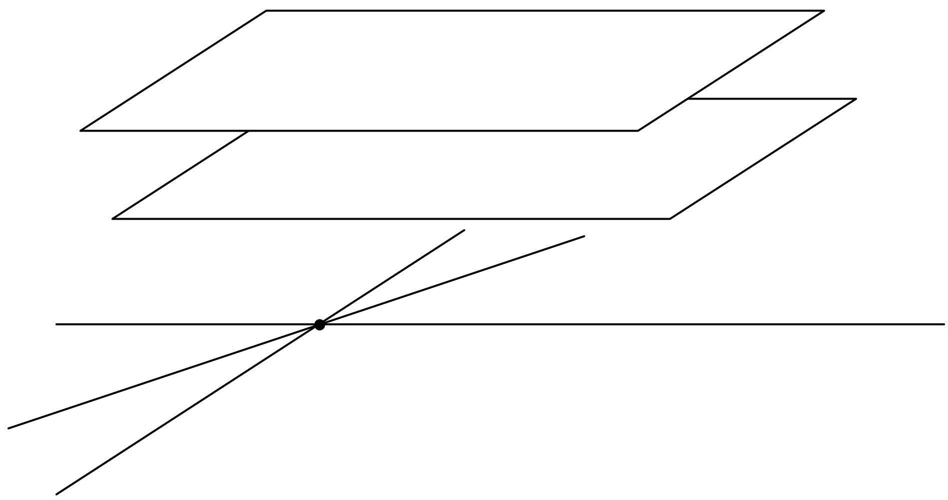
Ejercicio 24.-Halla las ecuaciones de la recta paralela a los planos x+y=1, x+z=0 y que pasan por el punto P(2,0,0)

Hay dos opciones:

a) Los planos se cortan en una recta y la recta buscada es paralela a ésta:



b) Los dos planos son paralelos o coincidentes, entonces existen infinitas rectas que pasan por el punto y son paralelas a los planos:



Estamos en el primer caso, ya que los planos se cortan $(\frac{1}{1} \neq \frac{0}{1})$; veamos el vector director de la recta en la que se cortan, cuya ecuación es:

$$r: \begin{cases} x+y=1 \\ x+z=0 \end{cases}$$

$\vec{v}$=(1,1,0)×(1,0,1)=(1·1-0·0,0·1-1·1,1·0-1·1)=(1,-1,-1).

Conociendo el vector director de la recta s, $\vec{v}$=(1,-1,-1) y un punto de la misma P(2,0,0), la ecuación de la recta en paramétricas viene dado por

s:(x,y,z)=(2,0,0)+λ(1,-1,-1)

Ejercicio 25.- Halla las ecuaciones de la recta que es paralela a la recta $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - y + 2z = 1 \end{cases}$ y pasa por el punto P(4,5,6)

Vamos a obtener las coordenadas del vector director de la recta, a partir de las ecuaciones en paramétricas:

Restando las dos ecuaciones se nos va la variable y:

x-z=-1 → x=-1+z, sustituyendo en la 1ª ecuación tenemos y=2(-1+z)+z=-2+3z

$$r:\begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=-2+3\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \rightarrow \vec{v}=(1,3,1).$$

Luego la ecuación de la recta buscada tiene el mismo vector director (es paralela) y pasa por el punto P:

s:(x,y,z)=(4,5,6)+λ(1,3,1)

Ejercicio 26.- Siendo la recta r: $\begin{cases} x - 2y - 2z = 1 \\ x + 5y - z = 0 \end{cases}$ y el plano π:2x+y+mz=n, hallar m y n de modo que

$$\pi: 2x+y+mz=n$$

$$r:\begin{cases} x-2y-2z=1 \\ x+5y-z=0 \end{cases}$$

a) r corte con π

rang(A)=rang(A*)=3

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & m \end{pmatrix},\ A^*=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & m & n \end{pmatrix}$$

rang(A)=3 → |A|=5m-2+4+20+1+2m=7m+23 → m≠-23/7

rang(A*)=3 siempre que el rango de A sea 3, luego, para que se corten m≠-23/7, ∀n∈R.

b) sean paralelos

Entonces rang(A)=2 → m=-23/7 y rang(A*)=3, es decir alguno de los menores de orden 3 de la matriz A* es distinto de cero. Veamos los valores de n que hacen rang(A*)=3:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & n \end{vmatrix}=7n-9\neq 0 \rightarrow n\neq 9/7\ ;\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & n & -\frac{23}{7} \end{vmatrix}=n-\frac{9}{7}\neq 0 \rightarrow n\neq 9/7;\quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 5 & -1 \\ n & 1 & -\frac{23}{7} \end{vmatrix}=12n-\frac{108}{7}\neq 0$$

→ n≠9/7.

Excepto cuando n=9/7 que se anulan los 3 menores el rango de A* es 3. Por esto, para que r y π paralelas n∈R-{9/7} y m=-23/7

c) r esté contenida en π

r está contenido en π si rang(A)=rang(A^*)=2, lo que ocurre si m=-23/7 y n=9/7.

Ejercicio 27.- Halla la ecuación del plano que pasa por P(0,0,1) y contiene a la recta r de ecuaciones r: $\begin{cases} 5x-3y+2z=5 \\ 2x-y-z=1 \end{cases}$

Para obtener las ecuaciones del plano buscado tenemos que conseguir dos vectores directores. Como la recta está contenida en el plano el vector director de r es el vector director de π. Podemos obtener otro vector director uniendo el punto del plano P con un punto cualquiera de la recta, siempre que P no pertenezca a dicha recta, ya que si así fuese este vector sería proporcional al primero.

Pasemos la recta a paramétricas (1)+2(2)→9x-5y=7 → x=7/9+5/9y

Sustituyendo en (2) z=-1+2(7/9+5/9y)-y → z=5/9+1/9y

$$r: \begin{cases} x=\frac{7}{9}+\frac{5}{9}\lambda \\ y=\lambda \\ z=\frac{5}{9}+\frac{1}{9}\lambda \end{cases} \quad \vec{v}=(\frac{5}{9},1,\frac{1}{9})\equiv(5,9,1),\ Q(\frac{7}{9},0,\frac{5}{9})$$

$$\vec{u}=\overrightarrow{PQ}=(\frac{7}{9},0,-\frac{4}{9})\equiv(7,0,-4)$$

A partir de estos datos la ecuación general del plano es :

$$\pi: \begin{vmatrix} x-0 & 5 & 7 \\ y-0 & 9 & 0 \\ z-1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -36x+27y-63z+63=0 \rightarrow \pi: 4x-3y+7z=-7$$

Ejercicio 28.-Estudiar la posición relativa de las siguientes rectas en función de m

r: $\begin{cases} 5x-3y+2z=5 \\ 2x-y-z=1 \end{cases}$ y s: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-2y+2z=m \end{cases}$

Este ejercicio es equivalente al realizado en el tema 9 (sistemas de ecuaciones), sólo que tenemos que dar una interpretación al resultado cuando las ecuaciones corresponden a dos rectas.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad A^*=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & m \end{pmatrix}$$

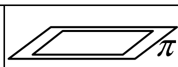
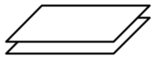
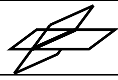
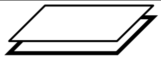
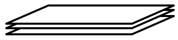
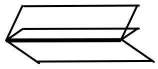
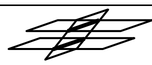
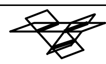
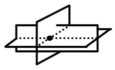
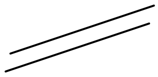
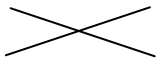
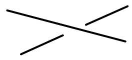
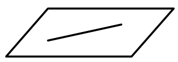
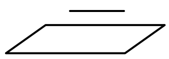
	m=-4	m∈R-{-4}
Rang(A)	3	3
Rang(A^*)	3	4
	Cortan en un punto	Se cruzan

· rang(A)=3

· rang(A^*)=4 si $|A^*|\neq 0$ → $|A^*|=4m+16\neq 0$ → m≠-4.

Si m=4 rang(A^*)=3.

Resumen posiciones relativas

POSICIONES RELATIVAS EN EL ESPACIO	**2 PLANOS** $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$ $\pi' \equiv A'x+B'y+C'z+D'=0$	$rangoM = rangoM^* = 1$	*Coincidentes*	 π, π'
		$rangoM = 1$ $rangoM^* = 2$	*Paralelos*	
		$rangoM = rangoM^* = 2$	*Secantes*	
	3 PLANOS $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$ $\pi' \equiv A'x+B'y+C'z+D'=0$ $\pi'' \equiv A''x+B''y+C''z+D''=0$	$rangoM = rangoM^* = 1$	*Coincidentes*	
		$rangoM = 1$ $rangoM^* = 2$	*2 coincidentes y 1 paralelo*	
			3 paralelos	
		$rangoM = rangoM^* = 2$	*Secantes en una recta*	
		$rangoM = 2$ $rangoM^* = 3$	*2 paralelos y 1 secante*	
			Secantes 2 a 2	
		$rangoM = rangoM^* = 3$	*Secantes en un punto*	
	2 RECTAS $r\begin{cases} P \\ \vec{u} \end{cases} y\ r'\begin{cases} Q \\ \vec{v} \end{cases}$	$rango(\vec{u},\vec{v}) =$ $= rango(\vec{u},\vec{v},\overline{PQ}) = 1$	*Coincidentes*	
		$rango(\vec{u},\vec{v}) = 1$ $rango(\vec{u},\vec{v},\overline{PQ}) = 2$	*Paralelas*	
		$rango(\vec{u},\vec{v}) =$ $= rango(\vec{u},\vec{v},\overline{PQ}) = 2$	*Secantes*	
		$rango(\vec{u},\vec{v}) = 2$ $= rango(\vec{u},\vec{v},\overline{PQ}) = 3$	*Cruzadas*	
	RECTA Y PLANO $r \equiv \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$	$rangoM = rangoM^* = 2$	*Contenida en el plano*	
		$rangoM = 2$ $rangoM^* = 3$	*Paralela al plano*	
		$rangoM = rangoM^* = 3$	*Secante al plano*