TEMA 7. INTEGRALES DEFINIDAS. ÁREAS.

1. Aproximación de áreas bajo una curva. Límite de la definición, integral definida.
2. Área comprendida por una función y el eje OX.
3. Área comprendida entre varias funciones

Contexto con la P.A.U.

Los problemas relacionados con áreas en selectividad aparecen, bien en cuestiones de un punto, o bien en un apartado de un problema de funciones.

Por lo general, cuando las integrales definidas aparecen en cuestiones de un punto, se suelen pedir las áreas encerradas entre parábolas y rectas; y cuando están en un apartado de un problema de funciones, el área es la comprendida entre la función del problema y el eje OX.

ANEXO:

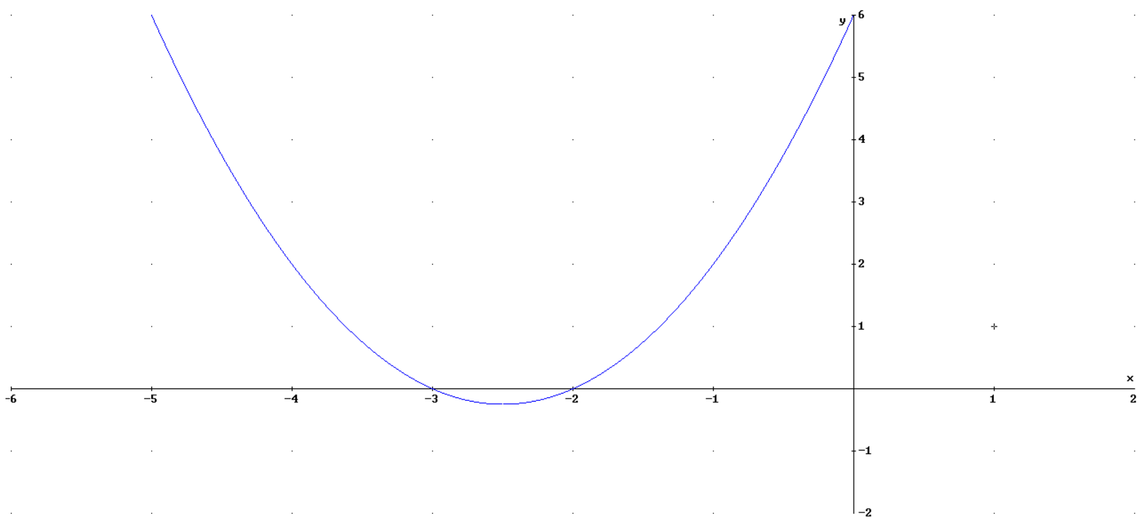
Representación de parábolas: $y=f(x)=ax^2+bx+c$:

- Vértice en $V(x_0,y_0)$, donde $x_0=-b/2a$ y $y_0=f(x_0)$
- Si $a>0$ función cóncava hacia arriba ($\cup$), y si $a<0$ cóncava hacia abajo ($\cap$)
- Los puntos de corte con el eje OX son las soluciones de la ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$. Nota:
  - Si $y_0>0$ y $a>0$,no corta con el eje OX
  - Si $y_0<0$ y $a<0$,no corta con el eje OX

Ejemplo: $y=x^2+5x+6$

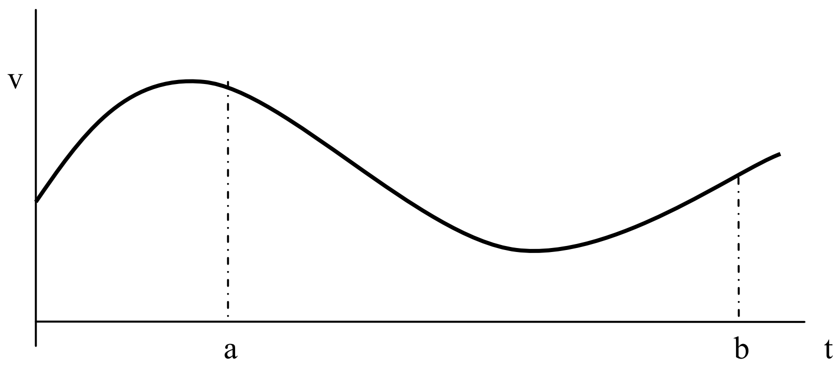
$V(x_0,y_0)$: $x_0=-\frac{5}{12}=-2.5$; $y_0=f(-2.5)=-0.25$. Por tanto $V(-2.5,-0.25)$

Puntos de corte $x=\frac{5\pm\sqrt{5^2-24}}{2}=\begin{cases}-3\\-2\end{cases}$ → (-3,0), (-2,0)



1. Aproximación de áreas bajo una curva. Límite de la definición, integral definida.

Hay infinidad de funciones extraídas del mundo real (científico, económico, física…) para las cuales tiene especial relevancia calcular el área bajo su gráfica. Vamos a ocuparnos del cálculo de estas áreas. Veamos un ejemplo práctico; imaginemos que la función v(t) representa la velocidad de un cuerpo en el tiempo, con la siguiente gráfica:

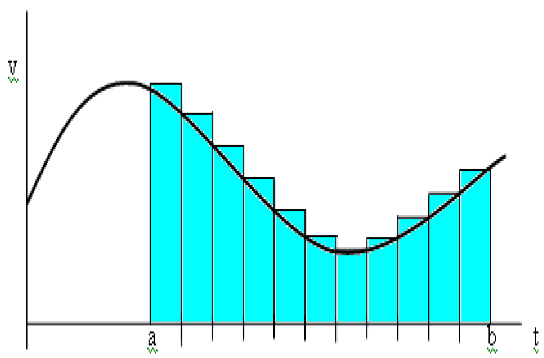


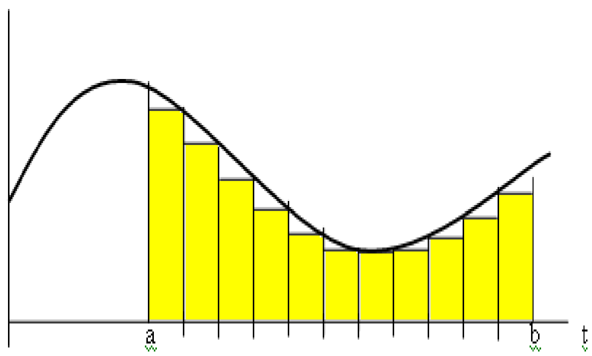
Queremos calcular el espacio recorrido entre t=a y t=b, por dicho cuerpo. El espacio será igual al área comprendida entre la gráfica y el eje de abscisas en el intervalo [a,b].

Una idea, utilizada desde la antigüedad para medir áreas, consiste en dividir el intervalo [a,b] en n pequeños tramos amplitud $\varepsilon = \frac{(b-a)}{n}$. Estos tramos tienen por extremos los siguientes puntos: $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$, donde $x_1=a+\varepsilon$, $x_2=a+2\varepsilon\ldots$

Podemos aproximar el área como la suma de los rectángulos con base ε y de altura m_i o M_i, donde m_i es el menor valor de la función en el intervalo $[x_i,x_{i+1}]$, y M_i el mayor valor de la función en el intervalo $[x_i,x_{i+1}]$.

Veamos gráficamente las áreas calculadas:





a) Suma superior

b) Suma inferior

Designemos al área calculada en a) como suma superior de Rieman, S(f(x)), siendo la calculada en b) la suma inferior de Rieman, s(f(x)).

Se cumple: ***S(f(x))≥área≥s(f(x))***

Los valores de las sumas de Rieman son:

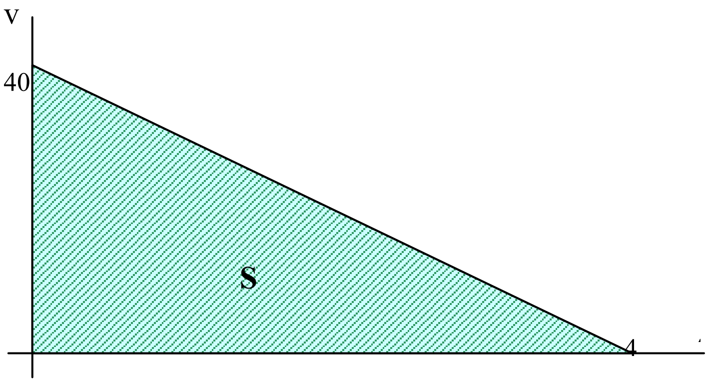
- $S(f(x))=M_1(x_1-x_0)+M_2(x_2-x_1)+\ldots+M_n(x_n-x_{n-1})$
- $s(f(x))= m_1(x_1-x_0)+m_2(x_2-x_1)+\ldots+m_n(x_n-x_{n-1})$

Es fácil darse cuenta que cuanto mayor sea el número, n, de intervalos, y por tanto cuanto menor sea ε, más se aproximarán al área exacta S(f(x)) y s(f(x). Así si $n\to\infty$, s(f(x))=area=S(f(x)).

Se cumple así que $\lim_{n\to\infty} s(f(x)) = \lim_{n\to\infty} S(f(x)) = \int_a^b f(x)dx$, que es la integral definida de f(x) con extremos a y b.

Regla de Barrow: Si F(x) es una primitiva de f(x), el valor de la integral definida de f(x) es: Área= $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

Ejemplo, sea un movimiento con aceleración constante a, $v = v_0 + at$. Sea v_0=40m/s y a=g=-10m/s^2 → v(t)=40-10t. Queremos calcular el espacio recorrido desde t=0 hasta que el cuerpo se pare t=4s:

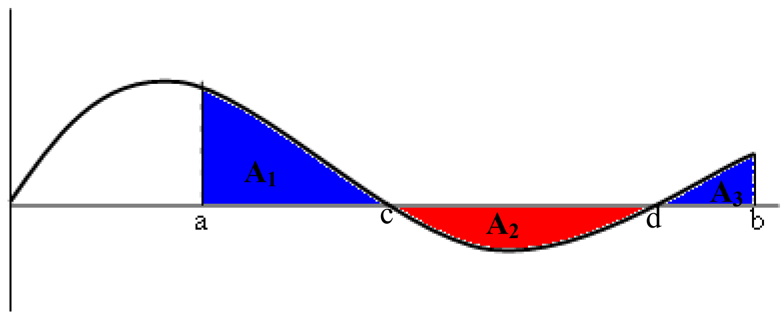


$$S = \int_0^4 (40-10t)dt = \left[40t - \frac{10}{2}t^2\right]_0^4 = \left[v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2\right]_0^4 = s_f - s_0 = (40\cdot 4 - 5\cdot 4^2) - (40\cdot 0 - 5\cdot 0^2) = 80 - 0 = 80\ m$$

2. Área comprendida por una función y el eje OX

En el apartado anterior la función f(x) siempre estaba sobre el eje OX (f(x)>0). En el caso de que la función por debajo del eje OX (f(x)<0) el área que obtendremos por el método de la integral definida será la misma pero negativa.

De esta forma, para calcular el área comprendida entre la función f(x) y el eje OX , tendremos que ver primero los intervalos donde la función es positiva, y cuando es negativa. Supongamos que queremos calcular el área de la siguiente curva y el eje OX:



Area=$A_1+A_2+A_3=\int_a^c f(x)dx-\int_c^d f(x)dx+\int_d^b f(x)dx$

Conclusión, pasos para calcular el área entre una curva y el eje OX:

1) Calcular los puntos de corte de la función con el eje OX
2) Estudiar el signo de la función entre los puntos de corte
3) Calcular una primitiva de f(x), F(x).
4) Calcular el área en cada intervalo y sumarlas.

Ejemplos:

Septiembre del 2005. Prueba A.

PR-2.b) Calcúlese el área delimitada por la gráfica de *f(x)* y las rectas *x=-1*, *x=1*, *y=0*.

Siendo *f(x)*$=\begin{cases} \ln(1+x^2), & x>0 \\ x^2 & x\leq 0\end{cases}$

Corte con eje OX:

f(x)=0 → $\ln(1+x^2)=0$ → $1+x^2=e^0=1$ → $x^2=0$ → x=0

Intervalo	(-1,0)	(0,1)
Signo f(x)	+	+
Área	$A_1=\int_{-1}^0 x^2dx$	$A_2=\int_0^1 \ln(1+x^2)dx$

$$A_1=\int_{-1}^0 x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^0=0-\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}\,u^2=0.333\cdot u^2$$

$$F=\int \ln(1+x^2)dx=x\cdot\ln(1+x^2)-\underbrace{\int\frac{2x^2}{1+x^2}dx}_{\int\left(2-\frac{2}{1+x^2}\right)dx}=x\cdot\ln(1+x^2)-2x+2arctg(x)$$

$u=\ln(1+x^2)$	$du=\frac{2x}{1+x^2}dx$
dv=dx	v=x

$$A_2=\int_0^1 \ln(1+x^2)dx=F(1)-F(0)=\left(\ln(2)-2+2arctg(1)\right)-\left(0\cdot\ln(1)-2\cdot 0+2arctg(0)\right)=$$

$=\ln(2)-2+2\cdot\pi/4-(2\cdot 0)=\ln(2)+\pi/2-2\approx 0{,}26\cdot u^2$

$A=A_1+A_2=1/3+\ln(2)+\pi/2-2=\ln(2)+\pi/2-5/3\approx 0{,}6\cdot u^2$

Nota: el resultado de los arcotangentes, arcosenos y arcocosenos se dan en radianes.

Ayuda para el cálculo de F(x):

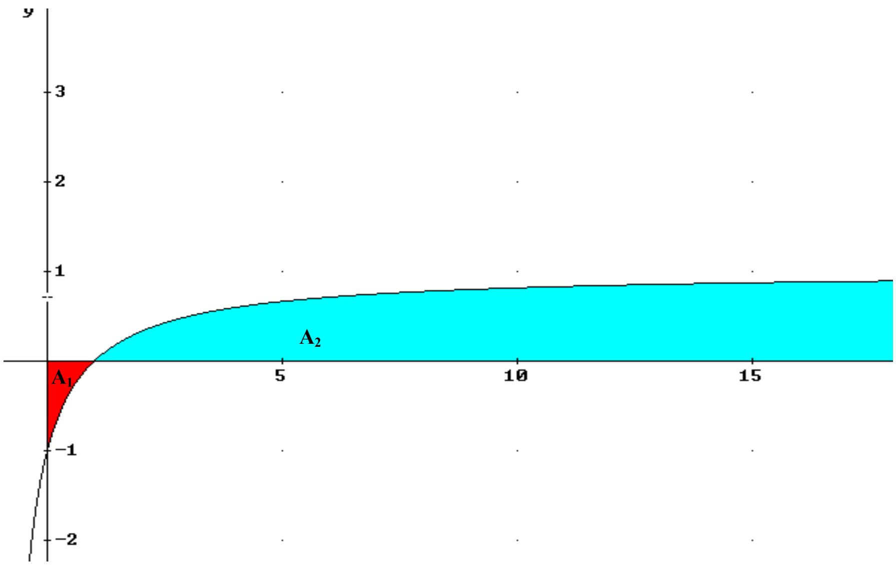
$$\int\frac{2x^2}{1+x^2}dx=\int 2dx-\int\frac{2}{1+x^2}=2x-2arctg(x)$$

$$\boxed{\begin{array}{r|l} 2x^2 & x^2+1 \\ \cline{2-2} -2x^2-2 & 2 \\ \cline{1-1} \underbrace{-2} & \end{array}}$$

Junio del 2006. Prueba B

PR-2. b) Calcúlese el área de la región limitada por *f(x)*=$\frac{x-1}{x+1}$ y las rectas *x=0, x=20, y=0.*

Corte con eje OX: f(x)=0 → x=1



Intervalo	(0,1)	(1,20)
Signo f(x)	-	+
Área	$A_1= -\int_0^1\frac{x-1}{x+1}dx$	$A_2=\int_1^{20}\frac{x-1}{x+1}dx$

$A=A_1+A_2$

$A_1=-\int_0^1\frac{x-1}{x+1}dx=-[x-2\ln(x+1)]_0^1=-[(1-2\ln(2))-(0-2\ln(1))]=-(1-2\ln(2))\approx 0{,}37\cdot u^2$

A$_2$=$\int_1^{20}\frac{x-1}{x+1}dx=[x-2\ln(x+1)]_1^{20}=(20-2\ln(21))-(1-2\ln(2))=19-2\ln(21)+2\ln(2)\cdot u^2\approx 14{,}3u^2$

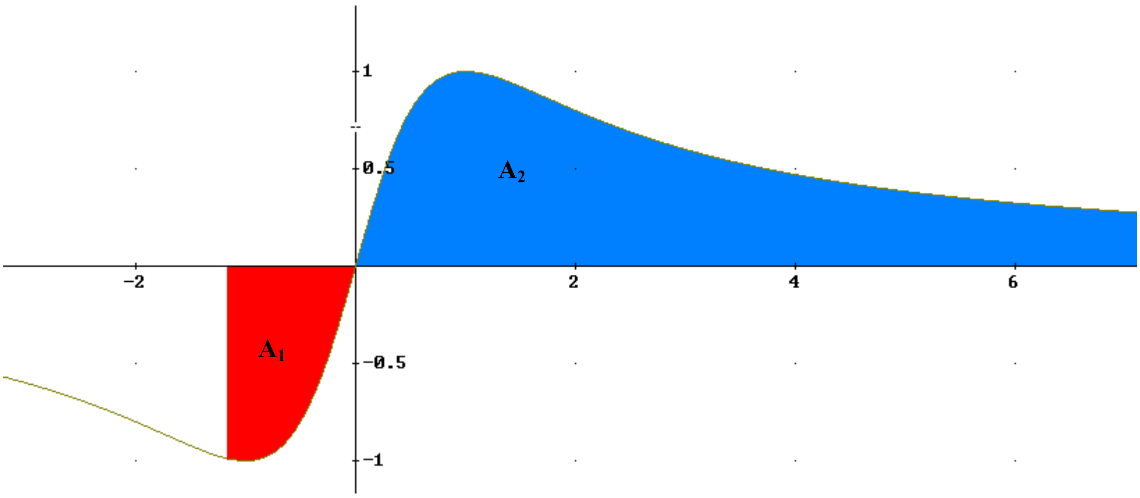
$\int\frac{x-1}{x+1}dx=\int 1dx-2\int\frac{dx}{x+1}=x-2\ln(x+1)$

A=18-2ln(21)+4ln(2) ≈14,67·u^2

Ejercicio Calcular el área comprendida entre el eje x, x=-1, x=7 y la función f(x)=$\frac{2x}{x^2+1}$

Corte con el eje OX: f(x)=0→x=0

Intervalos	(-1,0)	(0,7)
Signo f(x)	-	+
Área	A$_1$=$\int_{-1}^{0}\frac{2x}{x^2+1}dx$	A$_2$=$\int_0^7\frac{2x}{x^2+1}dx$



$F(x)=\int\frac{2x}{x^2+1}dx=\ln(x^2+1)$

$A_1=-\int_{-1}^{0}\frac{2x}{x^2+1}dx=-[\ln(x^2+1)]_{-1}^{0}=-[(\ln(1))-(\ln(2))]=\ln(2)\approx 0{,}7\cdot u^2$

$A_2=\int_0^7\frac{2x}{x^2+1}dx=[\ln(x^2+1)]_0^7=[(\ln(50))-(\ln(1))]=\ln(50)\approx 3{,}9\cdot u^2$

A=ln(2)+ln(50) ≈4,6·u^2

3. Área comprendida entre varias funciones

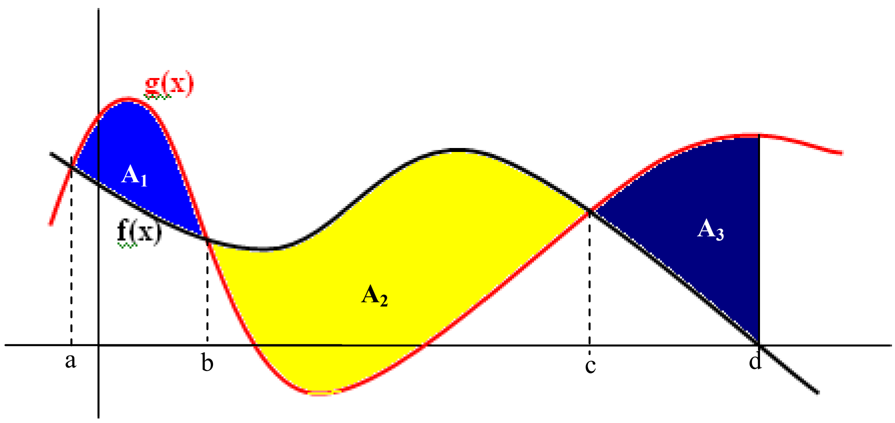
Cuando queremos calcular el área comprendida entre dos funciones, f(x) y g(x), tendremos que restar al área de la función que está por encima menos la función que está por debajo. Pasos

· Calcular los puntos donde se cortan las dos funciones. Estos se obtienen resolviendo la ecuación f(x)=g(x),

· En los intervalos definidos por los puntos de corte vemos si f(x) está por encima de g(x) → f(x)>g(x) o por debajo → f(x)<g(x).

· El área en cada intervalo es la integral definida con extremos los del intervalo y función de integración (f(x)-g(x)) si f(x)>g(x) ó (g(x)-f(x)) si f(x)<g(x)

Ejemplo gráfico:



Intervalo	(a,b)	(b,c)	(c,d)
Encima	g(x)	f(x)	g(x)
Debajo	f(x)	g(x)	f(x)
Área	$A_1=\int_a^b g(x)-f(x)$	$A_2=\int_b^c f(x)-g(x)$	$A_3=\int_c^d g(x)-f(x)$

Ejercicios:

Septiembre 2006. Prueba A

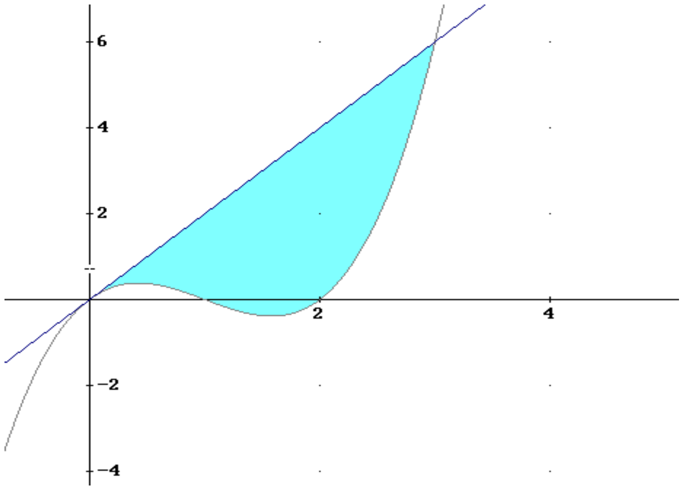
C-4. Estudiar el área del recinto limitado por la curva $y=x^3-3x^2+2x$ y su recta tangente en x=0.

a) recta tangente, m=f'(0)=2 → (0,f(0))=(0,0) → y=2x

Puntos de corte $f(x)=x^3-3x^2+2x$ y $g(x)=2x$

$x^3-3x^2+2x=2x \rightarrow x^3-3x^2=0 \rightarrow x=0,\ x=3$

Gráfico de la función f(x) y la recta tangente:



Cuando no nos dan los intervalos de integración en x, entonces se supone que el área pedida es el área entre sus dos puntos de corte.

Intervalo	(0,3)
Encima	2x
Debajo	x^3-3x^2+2x
Área	$A_1=\int_0^3 2x-(x^3-3x^2+2x)$

$$A=\int_0^3 2x-\left(x^3-3x^2+2x\right)dx=\left[-\frac{x^4}{4}+x^3\right]_0^3=\left(-\frac{81}{4}+27\right)-(0)=\frac{108-81}{4}=\frac{27}{4}\cdot u^2\approx 6{,}75\cdot u^2$$

Junio 2006. Prueba A

C-4.- Hállese el área del recinto limitado por la parábola $y=-x^2$ y la recta $y=2x-3$.

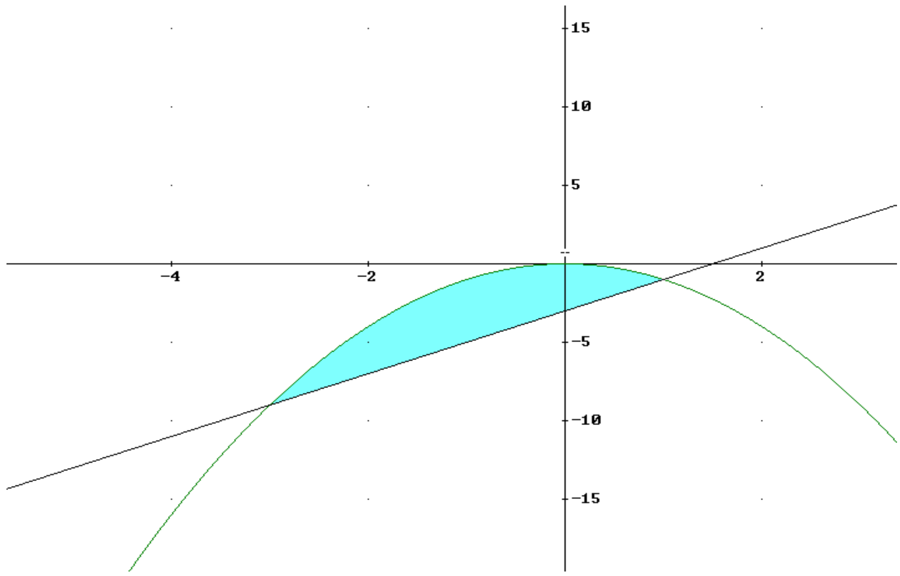
Puntos de corte $f(x)=-x^2$ y $g(x)=2x-3$

$-x^2=2x-3$ → $x^2+2x-3=0$ → x=1, x=-3

Intervalo	(-3,1)
Encima	$-x^2$
Debajo	2x-3
Área	$A=\int_{-3}^{0}\left(-x^2-(2x-3)\right)dx$

$$A=\int_{-3}^{1}\left(-x^2-(2x-3)\right)dx=\int_{-3}^{1}\left(-x^2-2x+3\right)dx=\left[-\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right]_{-3}^{1}=$$

$$=(-\frac{1}{3}-1+3)-(9-9-9)=\frac{32}{3}\cdot u^2\approx 10{,}7\cdot u^2$$



Junio 2005, Prueba B

C-4.- Hállese el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones

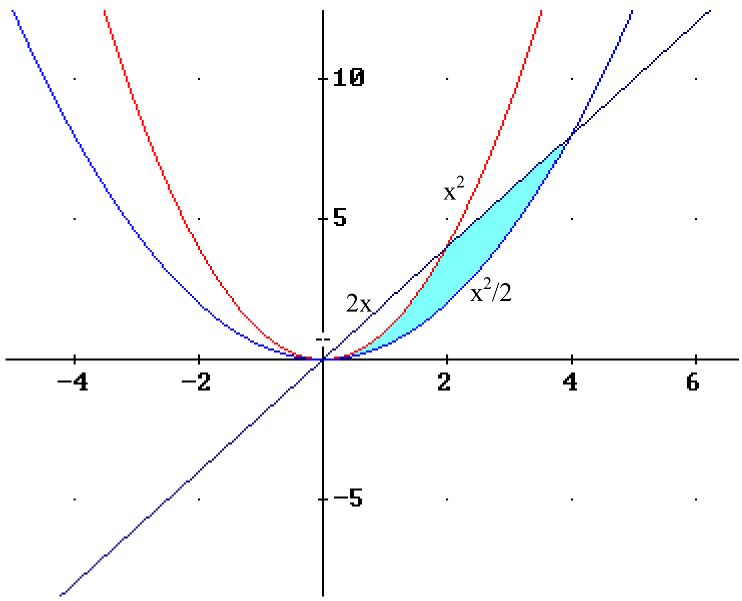
$y=f(x)=x^2$, $y=g(x)=x^2/2$, $y=h(x)=2x$

Puntos de corte gráficas

f(x) y g(x)→ $x^2=x^2/2$ → x=0

f(x) y h(x)→ $x^2=2x$ → x=0, x=2

g(x) y h(x)→ $x^2/2=2x$ → x=0, x=4



Intervalo	(0,2)	(2,4)
Encima	x^2	2x
Debajo	$x^2/2$	$x^2/2$
Área	$A_1=\int_0^2 \left(x^2-x^2/2\right)dx$	$A_2=\int_2^4 \left(2x-x^2/2\right)dx$

$$A_1=\int_0^2 \left(x^2-x^2/2\right)dx=\int_0^2\left(\frac{x^2}{2}\right)dx=\left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2=\left(\frac{8}{6}\right)-(0)=\frac{4}{3}u^2\approx 1{,}3\cdot u^2$$

$$A_2=\int_2^4 \left(2x-x^2/2\right)dx=\left[x^2-\frac{x^3}{6}\right]_2^4=\left(16-\frac{64}{6}\right)-\left(4-\frac{8}{6}\right)=12-\frac{56}{6}=\frac{8}{3}\cdot u^2\approx 2{,}7\cdot u^2$$

$A=A_1+A_2=4\cdot u^2$

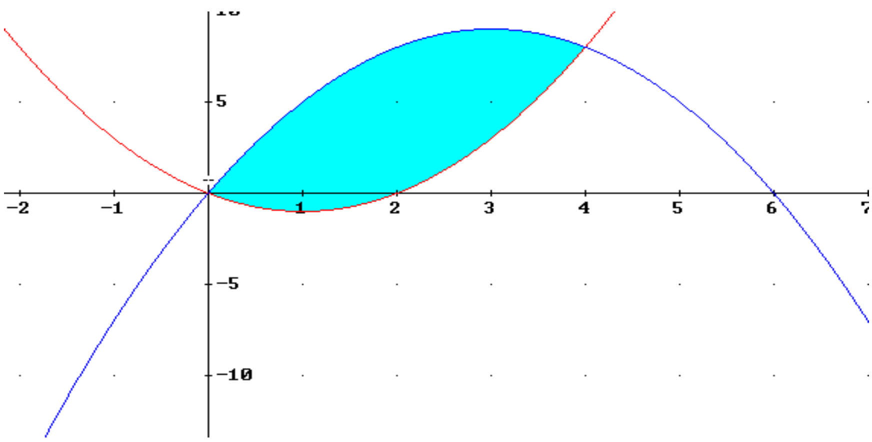
Septiembre de 2004, Prueba A

C-4.- Hállese el área del recinto limitado por las parábolas de ecuaciones respectivas *$y=f(x)=6x-x^2$ e $y=g(x)=x^2-2x$.*

Veamos los puntos de corte: $6x-x^2=x^2-2x \rightarrow 2x^2-8x=0 \rightarrow x=0,\ x=4$

Intervalo	(0,4)
Encima	$6x-x^2$
Debajo	x^2-2x
Área	$A=\int_0^4 \left(6x-x^2-(x^2-2x)\right)dx$

$$A=\int_0^4\left(6x-x^2-x^2+2x\right)dx=\int_0^4\left(8x-2x^2\right)dx=\left[4x^2-\frac{2x^3}{3}\right]_0^4=\left(64-\frac{128}{3}\right)-(0)=\frac{64}{3}u^2\approx 20{,}1u^2$$

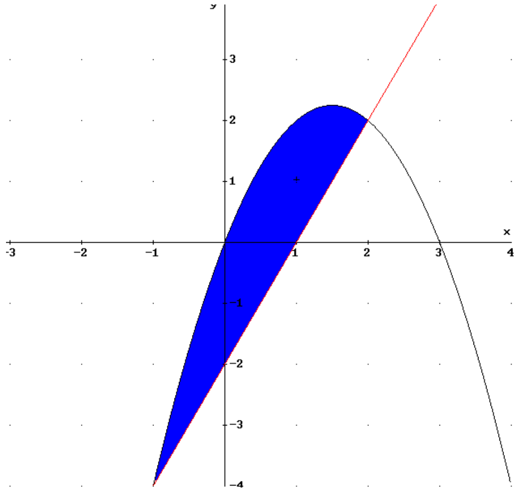


Septiembre de 2004, Prueba B

C-3.- Hállese el área limitada por las gráficas de las funciones $y=f(x)=3x-x^2$, $y=g(x)=2x-2$

Veamos los puntos de corte: $3x-x^2=2x-2 \rightarrow x^2-x-2=0 \rightarrow x=2, x=-1$

Intervalo	(-1,2)
encima	$3x-x^2$
debajo	$2x-2$
Área	A= $\int_{-1}^{2}\left(3x-x^2-(2x-2)\right)dx$



$$A=\int_{-1}^{2}\left(3x-x^2-2x+2\right)dx=\int_{-1}^{2}\left(x-x^2+2\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+2x\right]_{-1}^{2}=\left(2-\frac{8}{3}+4\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-2\right)=\frac{9}{2}$$

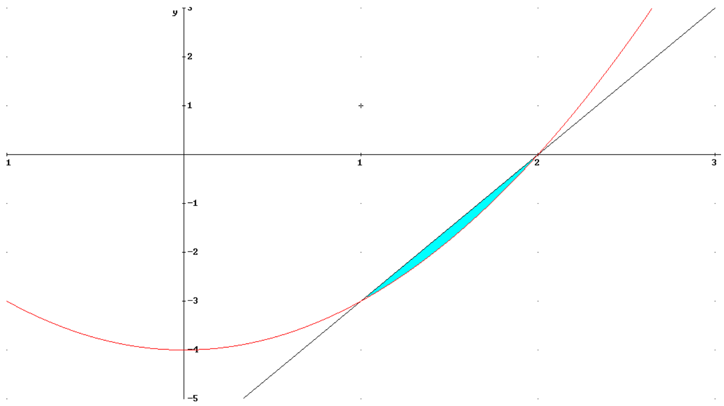
$=4,5\cdot u^2$

Junio de 2007, Prueba B

C-4. Hállese el área limitada por las gráficas de las funciones cuyas expresiones analíticas son $y=f(x)=x^2-4$, $y=g(x)=3x-6$

Puntos de Corte: $x^2-4=3x-6 \rightarrow x^2-3x+2=0 \rightarrow x=2, x=1$.

Intervalo	(1,2)
Encima	$3x-6$
Debajo	x^2-4
Área	$\int_{1}^{2}\left(3x-6-(x^2-4)\right)dx$



$$A=\int_{1}^{2}\left(3x-6-(x^2-4)\right)dx=\int_{1}^{2}(-x^2+3x-2)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-2x\right]_{1}^{2}=$$

$$=(-\frac{8}{3}+6-4)-(-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-2)\approx 0.17\ u^2$$

Junio 2004. Prueba A

PR-1. Sea la función $y=2\cdot e^{-2|x|}$.

b) Calcúlese el área de la región plana comprendida entre la gráfica de la función y las rectas $x= 1$ y $x= -1$.

$$y = 2\cdot e^{-2|x|} = \begin{cases} 2\cdot e^{2x} & si \;\; x<0 \\ 2\cdot e^{-2x} & si \;\; x \geq 0 \end{cases}$$

Veamos si f(x) corta el eje OX: (y=0) → $0=2\cdot e^{-2|x|}$→ no solución. Luego sólo hay que considerar en el intervalo el valor x=0 (donde cambia de expresión analítica). Se cumple que f(x)>0 en todo intervalo:

Intervalo	(-1,0)	(0,1)
Área	$A_1=\int_{-1}^{0} 2\cdot e^{2x}dx$	$A_2=\int_{0}^{1} 2\cdot e^{-2x}dx$

$$F(x) = \int 2\cdot e^{2x} = \frac{2\cdot e^{2x}}{2} = e^{2x}$$

$$G(x) = \int 2\cdot e^{-2x} = -\frac{2\cdot e^{-2x}}{2} = -e^{-2x}$$

$$A_1=\int_{-1}^{0} 2\cdot e^{2x}dx = F(0)-F(-1) = 1-e^{-2} \approx 0{,}86\ u^2$$

$$A_2=\int_{0}^{1} 2^{-2x}dx = G(1)-G(0) =\approx 0{,}86\ u^2$$

$$A=A1+A2 \approx 1{,}72\ u^2$$

Junio 2005. Prueba A

PR-2.- b) $f(x)=e^{1-x^2}$, calcúlese $\int_1^3 xf(x)dx$.

$$\int_1^3 xf(x)dx = \int_1^3 x\cdot e^{1-x^2}dx = F(3)-F(1) = -\frac{1}{2}(e^{-8}-e^{0}) \approx 0.5$$

$$F(x) = \int xe^{t}\frac{dt}{-2x} = -\frac{1}{2}\int e^{t}dt = -\frac{1}{2}e^{1-x^2}$$

$$\boxed{1-x^2 = t \;\rightarrow\; -2x = dt \;\rightarrow\; dt = \frac{dt}{-2x}}$$

Junio 2004. Prueba B

PR-2.- Sea $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Determínense *a, b* y *c* de modo que *f(x)* tenga un extremo relativo en $x=0$, la recta tangente a la gráfica de *f(x)* en $x=1$ sea paralela a la recta $y-4x=0$, y el área comprendida por la gráfica de *f(x)*, el eje OX y las rectas $x=0$, $x=1$, sea igual a 1.

Calculemos las derivadas → $f'(x)=3x^2+2ax+b$

a) Extremo relativo en x=0 → f´(0)=b → b=0

b) Recta tangente en x=1 y paralela a y=4x → f'(1)=3+2a=4 → a=1/2

c) $f(x)=x^3+0.5x^2+c$ → $\int_0^1 (x^3+0.5x^2+c)dx=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{6}+cx\right]_0^1=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+c=1$ → c=7/12

Junio 2007. Prueba A

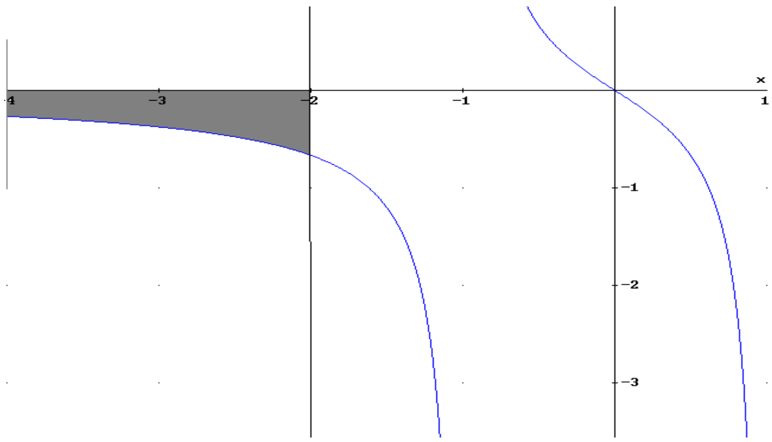
PR2- b) Sea $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$. Calcular el área de la región limitada por dicha gráfica y las rectas $x=-4$, $x=-2$.

Veamos en este intervalo si la función está por encima o debajo del eje OX→ f(x)=0 → x=0. Además tiene asíntotas verticales son en x=1y x=-1. Pero ninguno de estos valores de x están en el intervalo (-4,-2) y por esto f(x) mismo signo en este intervalo:

Intervalo	(-4,-2)
Signo(f(x))	-
Área	$A=-\int_{-4}^{-2}\frac{x}{x^2-1}dx$

$$F(x)=\int \frac{x}{x^2-1}dx=\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2-1}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2-1)$$

$A=-\int_{-4}^{-2}\frac{x}{x^2-1}dx$=-(F(-2)-F(-4))=-(0.5ln(3)-0.5ln(15))=0,5ln(5)≈0,805u^2



Junio 2008. Prueba B

PR2- Sea $f(x)=\begin{cases} \frac{\text{sen}(x^2)}{x}, & si\ x > 0 \\ x^2 - 2x & si\ x \leq 0 \end{cases}$ b) Calcular $\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} x^2 f(x)dx$

Como $(\sqrt{\pi}, \sqrt{2\pi})$ cumple que $x > 0$ *es la segunda expresión de la función*

$$\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} x^2 f(x)dx = \int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} x^2 \frac{sen(x^2)}{x}dx = \int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} xsen(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} 2xsen(x^2)dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\cos(x^2)\right]_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} = -\frac{1}{2}(\cos(2\pi - \cos(\pi)) = -\frac{1}{2}(1-(-1)) = -1$$

Junio 2007. Prueba A

C-4.- Calcular el área del recinto limitado por la curva de ecuación $y=ln(x)$, el eje OX y las rectas $x=1$ y $x=2$.

Tenemos que ver el signo de la función en el intervalo (1,2):

ln(x)=0 →x=e^0=1. Como 1∉(1,2) la función no cambia de signo, veamos el signo:

Intervalo	(1,2)
Signo(f(x))	+
Área	A=$\int_1^2 \ln(x)dx$

$$F(x) = \int \ln(x) = x\ln(x) - \int x\frac{dx}{x} = x(\ln(x)-1)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = \ln(x) \rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx \rightarrow \quad v = x \end{array}}$$

A=$\int_1^2 \ln(x)dx$=F(2)-F(1)=[2·ln(2)-2-(ln(1)-1)]=2ln(2)-1≈0.39·u^2

Septiembre 2007. Prueba B

PR-2.- Sea la función $f(x) = \frac{x}{x^2+4}$. El área de la región limitada por la gráfica de f, el eje OX y las rectas $x=-2$, $x=2$.

Tenemos que ver el signo de la función en el intervalo (-2,2):

f(x)=0 → x=0. Como 0∈(-2,2) cambia de signo:

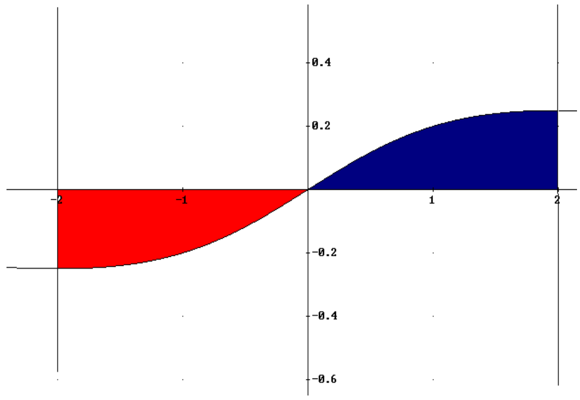
Intervalo	(-2,0)	(0,2)
Signo(f(x))	-	+
Área	A_1=-$\int_{-2}^0 \frac{x}{x^2+4}dx$	A_2= $\int_0^2 \frac{x}{x^2+4}dx$

$F(x)=\int \frac{x}{x^2+4}dx=\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+4}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+4)$

A_1=-$\int_{-2}^{0}\frac{x}{x^2+4}dx=-\frac{1}{2}[\ln(4)-\ln(8)]=\frac{1}{2}\ln(2)\approx 0.35\,u^2$

A_2=-$\int_{0}^{2}\frac{x}{x^2+4}dx=\frac{1}{2}[\ln(8)-\ln(4)]=\frac{1}{2}\ln(2)\approx 0.35\,u^2$

A= A_1+ A_2=ln(2)≈0,7 u^2



Septiembre 2005. Prueba B

PR-2.- Sea *P(a*, sen *a*) un punto de la gráfica de la función *f(x)=sen(x)* en el intervalo *[0,π]*. Sea r_p la recta tangente a dicha gráfica en el punto *P* y A_p el área de la región determinada por las rectas r_p, x=0, x=π, *y=0*. Calcúlese el punto *P* para el cual el área A_p es mínima. (Nota: Puede asumirse, sin demostrar, que la recta r_p se mantiene por encima del eje *0X* entre 0 y *π*)

Calculemos la recta r_p: m=f´(a)=cos(a) y que pasa por P(a, sen(a))

r_p: y=cos(a)(x-a)+sen(a)=cos(a)x-a·cos(a)+sen(a)

$$A=\int_0^{\pi}(\cos(a)x-a\cos(a)+sen(a))dx=\left[\frac{\cos(a)x^2}{2}+(-a\cos(a)+sen(a))x\right]_0^{\pi}=$$

$$=\frac{1}{2}\cos(a)\pi^2-a\pi\cos(a)+\pi sen(a)-0=\frac{1}{2}\cos(a)\pi^2-a\pi\cos(a)+\pi sen(a)$$

Luego la función a minimizar es f(a)= $\frac{1}{2}\cos(a)\pi^2-a\pi\cos(a)+\pi sen(a)$

f´(a)= $-\frac{1}{2}sen(a)\pi^2+a\pi sen(a)-\pi\cos(a)+\pi\cos(a)=sen(a)(a\pi-\pi^2/2)=0$

aπ-π^2/2=0 → $a=\frac{\pi}{2}$, sen(a)=0→ sólo a=0. Sólo $a=\frac{\pi}{2}\in$(0,π)

Demostremos que para este valor de a el área es máxima f´´(a)=cos(a)(aπ-π^2/2)+πsen(a)

f´´($\frac{\pi}{2}$)>0 mínimo.

Luego la recta es y= $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$x- $\frac{\pi}{2}$·$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$+sen$\left(\frac{\pi}{2}\right)$ → r_p : y=1.