TEMA 48. Espirales y Hélices.

1. Introducción.

Los griegos son considerados como “los padres de la geometría”, por ser la cultura que más avances produjo es esta rama, tardándose muchos años en ser superados. Uno de los pensadores más representativos de la Grecia clásica es Arquímedes, este matemático se quedó fascinado por la espiral, que hoy lleva su nombre.

El libro “Sobre Espirales” es una de las obras más admiradas por los sucesores de Arquímedes. En este libro se estudia la espiral calculándose la recta tangente por medio de consideraciones cinemáticas, constituyendo un precedente del cálculo infinitesimal desarrollado muchos siglos después. La espiral es considerada una curva mecánica generada por una superposición de dos movimientos, uno radial uniforme y otro circular también uniforme. También demostró que la relación entre el área barrida por el radio vector en su primera vuelta es igual a un tercio del área del círculo de radio la distancia del punto al finalizar la primera vuelta.

Cavalieri en el siglo XVII relacionó la espiral de Arquímedes ($r=a\cdot\theta$) y la parábola de Apolónio ($y\cdot a=x^2$). Calculó la longitud de la primera vuelta siendo la misma que la de la parábola entre el origen y $x=2\cdot\pi\cdot a$.

Descartes, en el mismo siglo, estudió la trayectoria de caída de un cuerpo a través de la Tierra en rotación. Obtuvo en este estudio la espiral conocida como espiral logarítmica: $r=a\cdot e^{b\cdot\theta}$

Si hay que destacar un matemático en la Edad Moderna en cuanto al estudio de espirales debemos destacar al matemático francés Bernuilli. De entre todas las espirales la que más le atrajo fue la logarítmica, descubierta por Descartes. Al profundizar su estudio mostró las siguientes propiedades:

- La evoluta de una espiral logarítmica es otra espiral igual.
- El lugar geométrico de las proyecciones de la curva del polo de la espiral sobre las rectas tangentes es otra espiral identica.
- La envolvente de los rayos refractados de la curva es también una espiral igual.

Tal es la admiración de Bernuilli por la curva que en su lápida hizo grabar una espiral logarítmica con la inscripción “aunque sea modificada surjo de la misma”.

2. Generalidades. Ecuaciones de una curva en el espacio y en el plano.

Llamamos ***función en dos dimensiones*** a una aplicación que nos relaciona un subconjunto de $\mathbb{R}$ (o todo $\mathbb{R}$) con un vector en del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ de la forma:

$$\begin{array}{rcl} \overline{f}:\ \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longrightarrow & (x(t),y(t)) \end{array}$$

Llamaremos ***curva*** en el plano definida por $\overline{f}$ al conjunto de puntos P tal que el vector $\overline{OP}$ es una imagen de $\overline{f}$, $\overline{f}(t_0)=\overline{OP}$. Esta forma de definir la curva se dice en ***paramétricas***.

Las curvas en el plano pueden venir definidas de ***forma analítica o explícita*** si la variable “y” es sobreyectiva de la forma $y=f(x)$, siendo entonces los puntos P de la forma, $P(x,f(x))$. También se pueden definir de forma explícita en ***coordenadas polares*** de la forma $r=f(\theta)$ siendo r la distancia con el origen y θ el ángulo del punto con el eje positivo del eje OX.

De igual forma definimos la ***función en tres dimensiones*** a una aplicación que nos relaciona un subconjunto de $\mathbb{R}$ (o todo$\mathbb{R}$) con un vector en del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ de la forma:

$$\overline{f}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$t \longrightarrow (x(t),y(t),z(t))$$

La curva cuando está así descrita al igual que en dos dimensiones se dice que está en ***paramétricas***, siendo los puntos del espacio P que cumplen que $\overline{f}(t_0)=\overline{OP}$.

Las curvas en tres dimensiones también pueden definirse de ***forma analítica*** siendo la solución al sistema (intercesión de dos superficies en el plano): $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$.

3. Espirales. Generalidades.

De forma general podemos definir las ***espirales*** como una curva plana que se obtiene al rotar un punto alrededor de otro llamado centro alejándose de este en cada instante. Dependiendo de la forma en que rota o en la que se aleja el punto tendremos distintos tipos de espirales.

Cada vuelta de la espiral se denomina ***espira***, y a la distancia entre el comienzo y el fin de la espira se denomina ***paso de la espira***.

A efectos prácticos son considerados también espirales a curvas compuestas por arcos de semicircunferencia enlazadas, o curvas formadas por unión de de distintos puntos de una espiral por segmentos rectilíneos. En este tema veremos con mayor detenimiento las espiras consideradas más importantes, las ***espirales arquimediana y las logarítmicas***.

4. La espiral de Arquímedes.

4.1. Ecuación de la espiral.

Dentro de todas las espirales es la más antigua estudiada, que se conozca. Su estudio se comienza en el siglo III a.C. Es una curva de generación mecánica de un punto que se obtiene por la composición de dos movimientos:

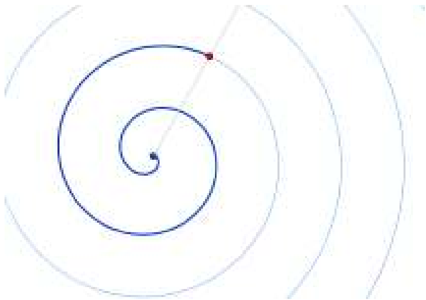
- Movimiento de rotación con velocidad angular constante: $\theta=\omega\cdot t$
- Movimiento radial(alejamiento origen) con crecimiento constante: $\rho=v\cdot t$

Estos movimientos modifican generan un movimiento cuya ecuación e polares es tal que tiene una relación lineal homogénea (despejando t).

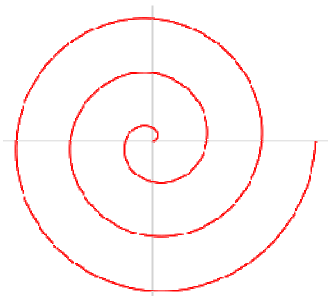
Ecuación paramétricas en polares: $\boxed{\left.\begin{matrix} \vartheta=\omega\cdot t \\ \rho=v\cdot t \end{matrix}\right\}}$ con $t\in\mathbb{R}$ que representa el tiempo.

Eliminando t de la ecuación tenemos la ecuación en polares***:*** $\boldsymbol{\rho=a\cdot\theta}$ con $a=v/\omega$. Cuanto mayor sea el valor de a (mayor relación de v respecto de ω) mayor es el paso de la espiral. Según el valor de de "a" tenemos que el giro es: a<0 horario, a>0 antihorario.

Para obtener la relación de la curva en cartesianas no tendremos más que relacionar las coordenadas polares con las cartesianas (x=ρ·cos(θ), y=ρ·sen(θ)) $\boxed{\begin{cases} x = v\cdot t\cdot \cos(\omega t) \\ y = v\cdot t\cdot sen(\omega t) \end{cases}}$



a<0



a>0

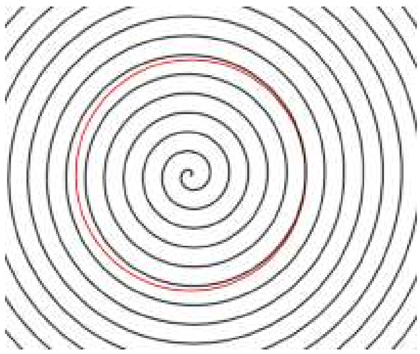
4.2. Propiedades de la espiral Arquímedes.

En este apartado vamos a ver algunas propiedades importantes de la espiral de Arquímedes:

1. ***Relación espiral y recta proporcional***: se puede observar el paralelismo entre la ecuación en polar de la espiral de Arquímedes ρ=a·θ y la ecuación en cartesianas de proporcionalidad directa (recta por el origen) y=a·x. Ambas ecuaciones nos presentan una proporcionalidad directa, sólo que mientras que la expresión y=a·x nos muestra la proporcionalidad entre las dos coordenadas cartesianas, que se plasma en un crecimiento lineal con pendiente constante; la expresión ρ=a·θ la proporcionalidad es entre el módulo del punto y el ángulo del mismo cuya gráfica es la espiral.

2. ***Paso de la espiral:*** la principal propiedad de la espiral de Arquímedes y que la distingue de las demás espirales es que el paso, distancia entre dos espiras consecutivas, es de valor constante. Este paso sólo depende del valor de "a". Veamos matemáticamente esta propiedad y el valor del paso en función de a:
$d = paso = \rho(\vartheta+2\pi)-\rho(\vartheta) = a\cdot(\vartheta+2\pi)-a\vartheta = 2\cdot a\cdot\pi$ (mayor valor de "a" más paso)

3. ***Relación con la circunferencia:*** Sean P y P' los puntos obtenidos por intersección de una recta por el centro O y dos espiras consecutivas. Se cumple, que como hemos visto que d(P,P')=d=2·a·θ. Si tenemos que dos espiras muy lejanas (θ muy grande) la distancia entre ambas espiras sigue siendo d pero la separación de las mismas respecto el origen es prácticamente el mismo.



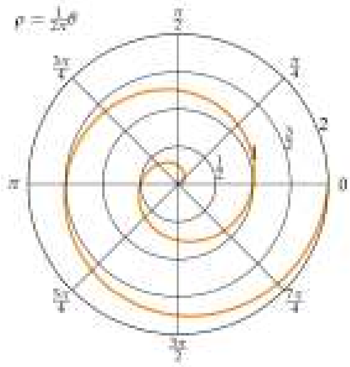
4. ***Longitud entre dos puntos de la espiral:*** la longitud entre dos puntos $P_0(\theta_0)$ y $P_1(\theta_1)$ viene determinada por la integral $l = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} d\vartheta\sqrt{\rho^2+\rho'^2} = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} a\cdot\sqrt{1+\vartheta^2}\,d\vartheta$. Haciendo el cambio de variable $\vartheta = ch(t)$ → $d\vartheta = sh(t)dt$ se cumple que

$$l = a\cdot\int_{ch^{-1}(\vartheta_0)}^{ch^{-1}(\vartheta_0)} sh^2(t)dt = a\cdot\int_{ch^{-1}(\vartheta_0)}^{ch^{-1}(\vartheta_0)} \frac{\cos(2\vartheta)-1}{2}dt = \frac{a}{2}\left(\vartheta_0\sqrt{1+\vartheta_0^{\,2}} - \vartheta_1\sqrt{1+\vartheta_1^{\,2}} + th^{-1}\vartheta_0 - th^{-1}\vartheta_1\right)$$

5. **Área de la espiral de Arquímedes:** Se cumple que el área barrida por el radio vector de la espiral de Arquímedes viene dada por la expresión (formula del área en polares): $a=\frac{1}{2}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} r^2 d\vartheta = \frac{1}{2}a^2\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}\vartheta^2 d\vartheta = \frac{1}{6}a^2\left(\vartheta_2^{\,3}-\vartheta_1^{\,3}\right)$. Si $\theta_1=2\pi$ y $\theta_2=0$ (primera espira) se cumple que el área barrida es $a=\frac{4}{3}\pi^3 a^2$, que es el un tercio del área de un círculo de r=2πa ($a=4\cdot\pi^3 a^2$) como había predicho Arquímedes.

4.3. Método de construcción de la espiral de Arquímedes.

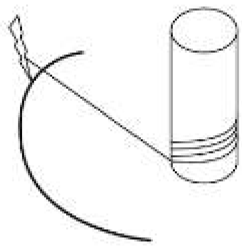
Existen varios métodos gráficos de construir la gráfica de la espiral de Arquímedes:



1. **Método de la telaraña** (a partir de la ecuación en polares): se marca en un papel polar ángulo centrados cada 5º, a partir de la ecuación en polares se determina el valor del radio de la curva para cada ángulo. Se unen los puntos formando una línea poligonal que en el límite de ángulos menores tendremos la espiral buscada.

2. **Por procedimientos mecánicos**
   a. **Método del alfarero:** si en un tocadiscos o un torno de alfarero dibujamos una línea recta esta se ve influenciada por dos contribuciones, la línea recta y el giro; el resultado es la espiral de Arquímedes. Si queremos ajustar el valor de a, tendremos que relacionar la velocidad, v y la frecuencia.

   b. **Desarrollando un hilo:** si sobre un pivote enrollas una cuerda y escribimos de forma perpendicular al plano mientras se suelta el hilo, cuyo resultado vuelve a ser la espiral de Arquímedes.



5. Espiral logarítmica o equiangular.

5.1. Definición y ecuación logarítmica.

Al igual que la espiral de Arquímedes se obtiene a partir de la composición de dos movimientos, uno circular y otro radial. A diferencia de la espiral de Arquímedes el movimiento radial no es con velocidad contante, es exponencial, por lo que el paso no es constante. Las ecuaciones en paramétricas en forma polar vendrán dadas por:

a. Movimiento circular con frecuencia constante: $\theta=\omega\cdot t$
b. Movimiento radial exponencial $\rho=r_0\cdot e^{v\cdot t}$

Si despejamos el parámetro t de la igualdad con θ y lo introducimos en la segunda expresión tendremos la ecuación en polares: $\boldsymbol{\rho=r_0\cdot e^{b\theta}}$ con $b=v/\omega$.

5.2. Propiedades de la espiral logarítmica.

1) ***Propiedad fundamental***: en todo punto de la espiral la recta tangente forma un ángulo constante con el segmento que une el punto con el centro, de aquí su nombre de espiral equiangular.

   Dem: vector tangente: $\bar{t} = (f'(\vartheta)\cos\vartheta - f(\vartheta)\cdot sen\vartheta, f'(\vartheta)sen\vartheta + f(\vartheta)\cdot\cos\vartheta)$ operando $\bar{t} = r_0 \cdot e^{\vartheta\cdot b}(b\cos\vartheta - sen\vartheta, b\cdot sen\vartheta - \cos\vartheta)$ y $\overline{OP} = (f(\vartheta)\cdot\cos\vartheta, f(\vartheta)\cdot sen\vartheta)$, $\overline{OP} = -r_0\cdot e^{\vartheta\cdot b}(\cos\vartheta, sen\vartheta))$, luego $\bar{t}\cdot\overline{OP} = (r_0)^2\cdot e^{2\vartheta\cdot b}\cdot b$. A partir de la definición del producto factorial: $\cos\alpha = \dfrac{b\cdot r_0{}^2\cdot e^{2\vartheta b}}{|\overline{OP}|\cdot|\bar{t}|} = \dfrac{b\cdot r_0{}^2\cdot e^{2\vartheta b}}{r_0\cdot e^{\vartheta b}\cdot r_0\cdot e^{\vartheta b}\sqrt{1+b^2}} = \dfrac{b}{\sqrt{1+b^2}} = cte.$

2) **Relación de homotecia**: si cortamos a una espiral logarítmica por una semirrecta con origen en O, esta cortará a e la espiral en P_1, P_2,…(donde el subíndice indica el número de espira en la que corta). Se cumple que $\dfrac{|\overline{OP_n}|}{|\overline{OP_{n-1}}|} = k = e^{2\pi b}$ (son punto homóticos).

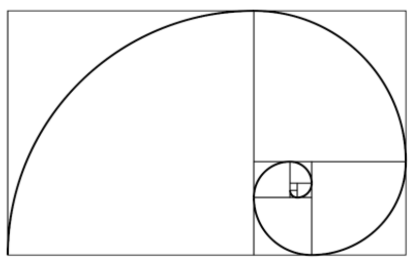
   Demostración: $|\overline{OP_n}| = \rho(\vartheta_0 + 2\pi n) = e^{(\vartheta_0+2\pi n)n}$ y $|\overline{OP_{n-1}}| = e^{(\vartheta_0+2\pi(n-1))b}$, siendo θ_0 el ángulo que forma la recta con el semieje positivo de OX. $\dfrac{|\overline{OP_n}|}{|\overline{OP_{n-1}}|} = \dfrac{e^{(\vartheta_0+2\pi(n-1))b}}{e^{(\vartheta_0+2\pi n)b}} = e^{2\pi b}$

3) Longitud espiral logarítmica entre θ_2 y θ_2: $l = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} d\vartheta\sqrt{\rho^2+\rho'^2} = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} r_0\sqrt{b^2+1}\cdot e^{b\vartheta}d\vartheta$

   $= \dfrac{r_0\sqrt{b^2+1}}{b}\cdot\left(e^{b\vartheta_1} - e^{b\vartheta_2}\right)$

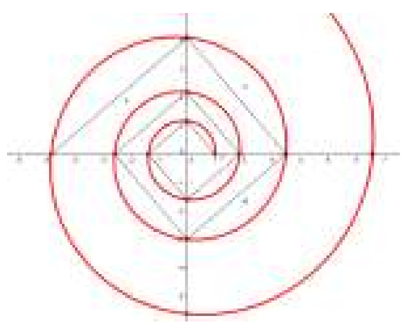
4) Área barrida por espiral: $a = \dfrac{1}{2}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}\rho^2 d\vartheta = \dfrac{1}{2}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} r_0{}^2\cdot e^{2b\vartheta}d\vartheta = \dfrac{r_0^2}{4b}\left(e^{2b\vartheta_2} - e^{2b\vartheta_1}\right)$

5) Espiral aurea: es una espiral exponencial asociada a las propiedades geométricas de los rectángulos áureos. Se cumple que la razón de crecimiento es ϕ: $\rho = e^{b\theta recto} = \phi \rightarrow$ b= $\dfrac{\ln(\phi)}{\pi/2}$.



5.3. Trazado espiral logarítmica.

No es sencillo construir de forma mecánica la espiral logarítmica, necesitamos además de un giro uniforme un desplazamiento radial continuo cuya velocidad crezca exponencialmente. Se recurre al siguiente procedimiento gráfico:

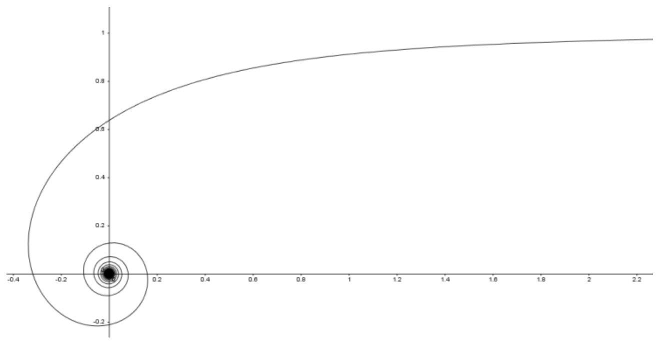


Tomamos un segmento entre los dos ejes, y trazamos otro segmento perpendicular que corta otra vez en los dos ejes. Repetimos el proceso las veces que deseemos aumentando en cada momento el radio de forma proporcional con el ángulo fijo.

6. Otras espirales.

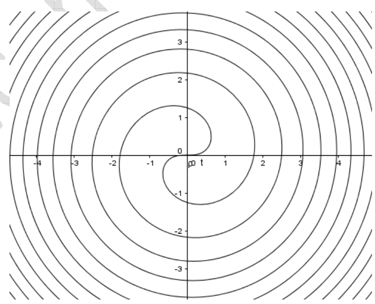
6.1. Espiral hiperbólica.

Existen multitud de diferentes tipos de espirales, una de las más importantes es la espiral hiperbólica. Su ecuación en polares definida por $\rho\cdot\theta=a$ (equivalente a la hipérbola equilátera en cartesianas), o lo que es lo mismo $\rho=\dfrac{a}{\vartheta}$. Esta curva caracterizada porque cuanto mayor es el ángulo menor el módulo, y además tiene una asíntota cuando $\theta\to 0$, pues $\rho\to\infty$. La asíntota es y=a, ya que $x=\rho\cdot\cos(\theta)=a\dfrac{\cos(\theta)}{\theta}$ e $y=\rho\cdot sen(\theta)=a\dfrac{sen(\theta)}{\theta}$, haciendo $\theta\to 0$ se cumple y=a y $x\to\infty$



6.2. Espirar parabólica o de Fermat.

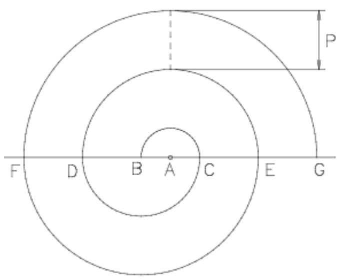
Es una espiral que no tiene foco o centro. Puede verse gráficamente como dos espirales con distinto sentido que coinciden en un punto. La ecuación de esta espiral es $\rho^2=a\cdot\theta$. Veamos la gráfica:



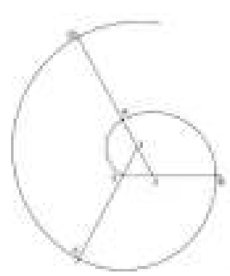
6.3. Falsas espirales

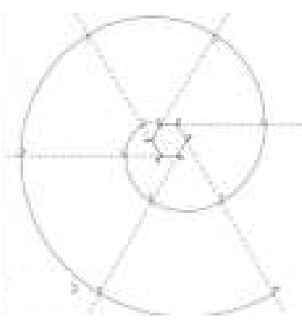
Se denominan así por estar construidas por curvas “a trozos” y no ser una curva continua. Tenemos varios ejemplos:

a. **Espiral de dos centros**: a partir de dos puntos A y B trazamos la recta que pasa por ambos y con centro en A trazamos semicircunferencia desde B hasta la recta cortando a la misma en C; trazamos ahora la semicircunferencia con centro en B y radio BC que corta a la recta en D. Repetimos el proceso alternando los centros A y B.

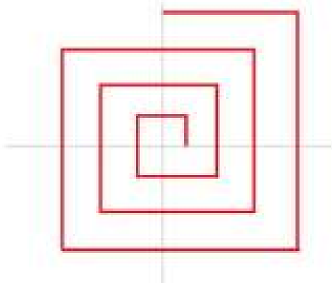


b. A partir de un polígono regular podemos trazar **espirales con 3 o más centros**.





c. **Espirales poligonales:** construida a base de polígonos que según nos alejamos del centro aumenta su tamaño.



7. Hélices

7.1. Conocimientos previos.

Veamos algunas definiciones previas:

a) Una curva en el espacio es una aplicación $\varphi: I\subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ (paramétricas), φ:(x(t),y(t),z(t))

b) La longitud de la curva entre dos puntos φ(a) y φ(b) viene dado por la integral siguiente: $l=\int_a^b \varphi'(t)dt$

c) Si tomamos como parámetro la longitud, s, de la curva entre un punto fijo P=φ(a) y un punto variable Q=φ(t) tendremos la misma curva pero ahora con su parámetro φ(s). Se cumple que $|\varphi'(s)|=1$ y $\varphi''(s)\perp \varphi'(s)$.

d) El vector $\overline{t}=\varphi'(s)$ es el vector tangente a la curva, $\overline{n}=\varphi''(s)$ el vector normal y $\overline{b}=\overline{t}\times\overline{n}$ el vector binormal. Juntos forman el triedro intrínseco de la curva.

e) La curvatura,k, mira el giro de la curva en el plano OXY y se calcula como: $k=\left|\frac{d\overline{t}}{ds}\right|$, luego se cumple que $\frac{d\overline{t}}{ds}=k\cdot\overline{n}$

f) La torsión, τ, mira el giro de la curva en el eje OZ y se calcula como $\tau=\left|\frac{d\overline{b}}{ds}\right|$, luego se cumple que $\frac{d\overline{b}}{ds}=-\tau\cdot\overline{n}$.

7.2. Definición de hélice.

Las hélices constituyen un tipo de curvas alabeadas (no planas) que se pueden entender como "espirales espaciales". Desde el punto de vista mecánico es la trayectoria por un punto sometido simultáneamente a un movimiento giratorio en torno a un eje (eje OZ generalmente) y otro movimiento lineal de avance paralelo al eje de rotación, y puede haber otro movimiento correspondiente al alejamiento al eje de rotación.

De manera formal una curva no plana es una hélice si su vector tangente en todo punto de la hélice forma un ángulo fijo con su eje, llamada eje de la hélice. La ecuación de las hélices es de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} x=\gamma_x(s)\cdot\cos(wt) \\ y=\gamma_y(s)\cdot sen(wt) \\ z=\gamma_z(s) \end{array}\right\} siendo\ OZ\ el\ eje$$

7.3. Hélice circular.

Se llama de ésta forma porque la proyección en el plano OXY es una circunferencia. Surge de composición de dos movimientos continuos:

1. Giro con velocidad angular w formando una circunferencia en torno a un eje (OZ).
2. Desplazamiento lineal con velocidad constante paralelo al mismo eje.

Según la definición la ecuación de la curva en paramétricas viene dado por las ecuaciones:

$$\varphi(t)=\begin{cases} x=R\cdot\cos(wt) \\ y=R\cdot sen(wt) \\ z=v\cdot t\end{cases}$$ Si v>0 movimiento horario, y si v<0 antihorario.

La hélice está situada en las paredes de un cilindro circular de ecuación $x^2+y^2=R^2$

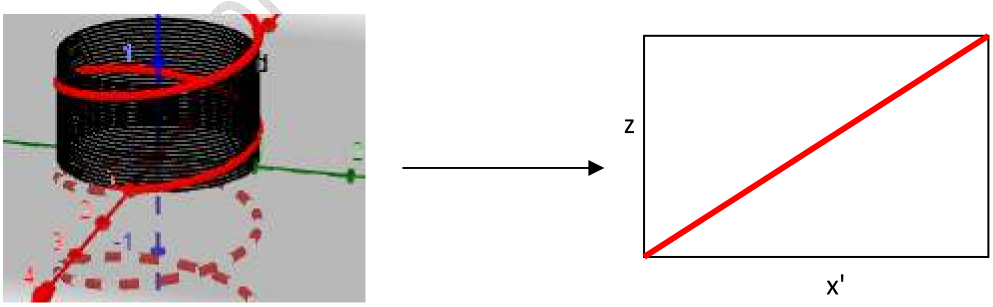
Veamos que la curva así definida cumple la definición de hélice y forma el vector tangente un ángulo constante con el eje OZ (vector $\bar{u}_z$):

$\bar{t}=(Rw\cdot\cos(wt),-Rwsen(wt),v)$,luego $\alpha=\cos^{-1}\left(\frac{\bar{t}\cdot\bar{u}_z}{|\bar{t}|\cdot|\bar{u}_z|}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{v}{\sqrt{R^2w^2+v^2}}\right)$=cte.

Propiedades:

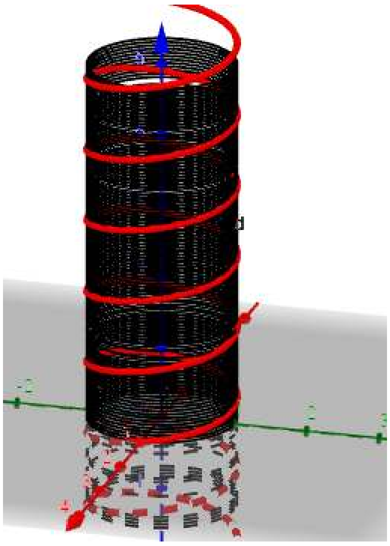
<u>Propiedad 1</u>: El ***paso*** de la hélice es ***contante***, sean t_1 y t_2 dos instantes separados un periodo T=2π/w, $t_2=t_1+T$: $P_1(R\cos(wt_1), Rsen(wt_1), vt_1)$ y $P_2(R\cos(wt_1), Rsen(wt_1), v(t_1+T))$ el paso es $d(P_1,P_2)=|\overline{P_1P_2}|=b\cdot T$.

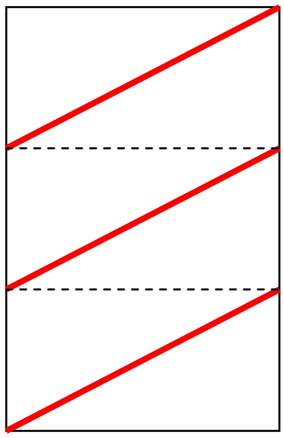
<u>Propiedad 2:</u> Si trazamos la hélice sobre un cilindro de altura igual al paso (b·T) si desarrollamos la cara lateral del cilindro en un plano la espira se transforma en una recta diagonal del rectángulo en el que se convierte el cilindro.



Con x'=longitud de la proyección de la cicloide en plano OXY→ x'=R·w·t y z=v·t. Despejando t de z tendremos: $z=\frac{b}{Rw}\cdot x'$ que es la ecuación de la diagonal del rectángulo.

Corolario:





Propiedad 3: La curvatura y la torsión son constantes en el tiempo:

$$s=\int_0^t|\varphi'(t)|dt=\int_0^t\sqrt{v^2+(R\cdot w)^2}\,dt=t\cdot\sqrt{v^2+(Rw)^2}\rightarrow t=\frac{s}{\sqrt{v^2+(Rw)^2}}$$

$$\gamma(s)=\left(R\cdot\cos\left(\frac{ws}{\sqrt{v^2+(Rw)^2}}\right),R\cdot sen\left(\frac{ws}{\sqrt{v^2+(Rw)^2}}\right),\frac{v\cdot s}{\sqrt{v^2+(Rw)^2}}\right)$$

$$\bar{t}=\gamma'(s)=\left(\frac{-Rw}{\sqrt{v^2+(Rw)^2}}sen\left(\frac{ws}{\sqrt{v^2+(Rw)^2}}\right),\frac{Rw}{\sqrt{v^2+(Rw)^2}}\cos\left(\frac{ws}{\sqrt{v^2+(Rw)^2}}\right),\frac{v}{\sqrt{v^2+(Rw)^2}}\right)$$

$$\frac{d\bar{t}}{ds}=\left(\left(\frac{-Rw^2}{\sqrt{v^2+(Rw)^2}}\cos\left(\frac{ws}{\sqrt{v^2+(Rw)^2}}\right),\frac{-Rw^2}{\sqrt{v^2+(Rw)^2}}sen\left(\frac{ws}{\sqrt{v^2+(Rw)^2}}\right),0\right)\right)\rightarrow\boxed{k=\left|\frac{d\bar{t}}{ds}\right|=\frac{Rw^2}{v^2+(Rw)^2}}$$

$$\bar{n}=\left(-\cos\left(\frac{ws}{\sqrt{v^2+(Rw)^2}}\right),-sen\left(\frac{ws}{\sqrt{v^2+(Rw)^2}}\right),0\right),$$

$$\bar{b}=\bar{t}\times\bar{n}=\left(\frac{v}{\sqrt{v^2+(Rw)^2}}sen\left(\frac{ws}{\sqrt{v^2+(Rw)^2}}\right),\frac{-v}{\sqrt{v^2+(Rw)^2}}\cos\left(\frac{ws}{\sqrt{v^2+(Rw)^2}}\right),\frac{Rw}{\sqrt{v^2+(Rw)^2}}\right)$$

$$\tau=\left|\frac{d\bar{b}}{ds}\right|=\left|\left(\frac{vw}{R^2w^2}\cos\left(\frac{ws}{\sqrt{v^2+(Rw)^2}}\right),\frac{vw}{R^2w^2}sen\left(\frac{ws}{\sqrt{v^2+(Rw)^2}}\right),0\right)\right|=\boxed{\frac{vw}{R^2w^2}=\tau}$$

Propiedad 4: La proyección de la hélice a un plano perpendicular al plano OXY es una curva sinusoidal: Por ejemplo si y=0 → $\left.\begin{array}{l}x=R\cos(wt)\\ z=v\cdot t\end{array}\right\}x=R\cdot\cos\left(\frac{wz}{v}\right)$

7.4. Hélice elíptica.

Composición de un movimiento paralelo al eje OZ de velocidad constante y un movimiento elíptico en el plano OXY:

$$\left.\begin{array}{l} x = a\cdot\cos(wt) \\ y = b\cdot\cos(wt) \\ z = v\cdot t \end{array}\right\}$$ Esta hélice no tiene curvatura constante pero si la torsión.

7.5. Hélice cónica.

Composición de un movimiento paralelo al eje OZ de velocidad constante y una espiral de Arquímedes en el plano OXY:

$$\left.\begin{array}{l} x = t\cdot\cos(wt) \\ y = t\cdot\cos(wt) \\ z = v\cdot t \end{array}\right\}$$ La curva está situada en la superficie del cono de ecuación $x^2+y^2=z^2/v^2$

<u>Propiedades</u>:

Propiedad 1: Paso= $\sqrt{(z_2 - z_1)^2 + (\rho_2 - \rho_1)^2} = \sqrt{(v\cdot T)^2 + T^2} = T\sqrt{1+v^2}$

Propiedad 2: la proyección en el plano perpendicular al plano OXY es una función senosoidal modulada:

Si y=0 → $\left.\begin{array}{l} x = t\cos(wt) \\ z = v\cdot t \end{array}\right\} x = \frac{z}{v}\cdot\cos\left(\frac{wz}{v}\right)$

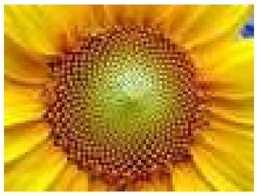
8. Presencia en la naturaleza, técnica y arte.

8.1. Naturaleza.

Existen en la naturaleza numerosos ejemplos cuya forma es semejante a una espiral o una hélice.

La espiral del Arquímedes se presenta, salvo excepciones, de manera "artificial", es decir no forma parte de los seres vivos y es creado esporádicamente por ellos. Este es el caso de las trompas de la mariposas y moscas o la forma de la serpiente en el suelo en reposo o la tela de araña:

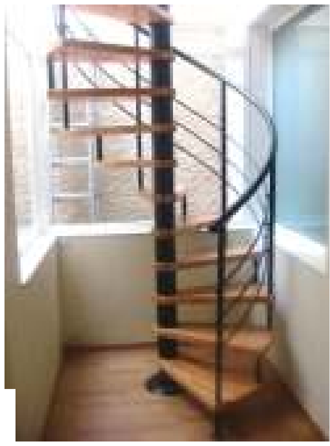
Más frecuente es la espiral logarítmica. Los caracoles planos su concha es de esta forma, las espiras se van ensanchando según se alejan del centro. Lo mismo ocurre en algunos fósiles como la concha del nautilo (espiral aurea). La forma de un girasol también es una espiral aurea.



Por otro lado la hélice aparece también en multitud de situaciones en la naturaleza, como el crecimiento de las plantas trepadoras, las formas de las escamas de las piñas, la clorofila de las algas, las moléculas de ADN, la Vía Lactea se desplaza en el Universo en forma de hélice, los tornados, las caracolas y caracoles no planos.

8.2. En la técnica.

El hombre a utilizado las formas de las hélices y espirales, unas veces por necesidad práctica otras veces por razones estéticas. Algunos ejemplos son las escaleras de caracol, lo muelles, el sacacorchos.



8.3. En el arte.

Como la construcción de la espiral aquimediana es tan sencilla y tan visual que hace que muchas sean las obras donde aparecen, incluso primitivas (Trisquel celta), barandillas, rejas, violín…

9. Conclusiones.

Ni espirales ni hélices aparecen en el currículo de secundaria no bachillerato. Se pueden utilizar para alumnos con altas capacidades como actividades de ampliación.