Tema 2. Operaciones con Números Reales

1. Aproximación decimal de los números reales

1.1. Introducción

Cuando realizamos una medida hay que darse cuenta que es imposible realizar la medida con exactitud infinita, siempre hay un margen de error debido al aparato de medida utilizado. Por ejemplo si medimos una línea dibujada en el encerado con distintas reglas con diferente escala, podemos obtener mayor exactitud cuanto mas pequeña sea la escala de la regla. Pero nunca podremos saber si el valor exacto de la línea.

¿pero es realmente importante saber el valor exacto de una medida?¿con que aproximación debemos tomar la medida?. Veamos un ejemplo de la vida diaria: la longitud y altura de un túnel (por ejemplo el Negrón de León a Asturias). Cuando entramos en el túnel nos encontramos las siguientes informaciones:

a) Longitud del túnel de 3470m
b) Altura del túnel 3,4m

Examinemos la información:

a) Nos dan una información aproximada a metros…¿pero es importante saber si la longitud es exactamente 3470,2344?. Cuando vayamos en el coche esa diferencia de medida nos va dar igual.

b) En la altura es más importante que sea más aproximado, pues una diferencia de 1 metro es muy grande. Pero a un conductor le va dar igual si el túnel no mide exactamente 3,4 o por en cambio 3,43…si tu camión mide 3,4 seguro que no pasarás.

Momentos en los que hay que aproximar:

1) **Cuando medimos**: queremos conocer información del entorno que nos rodea. Dos tipos de errores:
   a. **Experimentales o instrumentales:** siempre existen debido a la imposibilidad de tener elementos de medida de escala infinita. El error nos lo da el elemento de medida (la regla milímetros, por ejemplo)
   b. **Accidentales:** son errores debido a la mayor o menor pericia de la persona que mide. Si realizamos una buena observación al realizar la medida este error no existe

2) **Cuando queremos obtener el valor numérico de números irracionales:** ejemplo si queremos saber el valor numérico de π, utilizamos una aproximación π=3,14 o de $\sqrt{2}=1{,}41$. La aproximación puede ser más o menos próxima al número exacto como deseemos, basta con tomar más cifras decimales.

3) **Cuando queremos obtener el valor numérico de números racionales pero sin tanta aproximación:** ejemplo si tenemos el número calculamos el dinero que nos debe el banco con los intereses y este es 123,4517€, es estúpido que tenga tantos decimales, pues no existen monedas de menos de un céntimo. Así que lo aproximamos a 123,45€.

En este tema vamos sólo a tratar los dos últimos tipos de aproximaciones, el primero se estudiará en Física.

<u>Notación de las aproximaciones:</u>

La notación más habitual utilizada en los libros de texto es la siguiente:

- El valor exacto se denota por **A**
- El valor aproximado se denota por **B**

En el ejemplo del número $\pi \rightarrow$ A=π y B=3,14. En el ejemplo del dinero A=123,4517 y B=123,45.

1.2. Tipos de aproximación. Truncamiento y redondeo.

En este apartado vamos a ver como obtener el valor aproximado B, de un número exacto A. A la hora de aproximar dos tipos de aproximación:

- Truncamiento
- Redondeo

<u>Truncamiento:</u> consiste en contar el número exacto sin preocuparnos de cómo continua la expresión decimal después. Ejemplo: aproximación por turncamiento de π=3,14159...

- Truncamiento de las unidades $\rightarrow \pi \approx 3$
- Truncamiento de las décimas $\rightarrow \pi \approx 3,1$
- Truncamiento de las centésimas $\rightarrow \pi \approx 3,14$
- Truncamiento de las milésimas $\rightarrow \pi \approx 3,131$

…

…

La aproximación por truncamiento siempre es por defecto, es decir **B<A.** El error cometido en el truncamiento es siempre menor que una unidad en la que se aproxima, veremos esto mejor en el siguiente apartado.

<u>Redondeo</u>: en el redondeo la aproximación puede ser por defecto o por exceso, depende del valor de la cifra siguiente a la que aproximamos. De esta forma:

- Si la cifra siguiente al orden de aproximación es menor que 5 la aproximación por redondeo es la misma que la de truncamiento y por tanto la aproximación es por defecto
- Si la cifra siguiente al orden de aproximación es mayor o igual que 5 la aproximación por redondeo es por exceso, con lo que sumamos una unidad de la unidad aproximada a la aproximación que obtendríamos por truncamiento.

Ejemplo: aproximación por redondeo de π=3,14159...

- Truncamiento de las unidades $\rightarrow \pi \approx 3$ (por defecto)
- Truncamiento de las décimas $\rightarrow \pi \approx 3,1$ (por defecto)
- Truncamiento de las centésimas $\rightarrow \pi \approx 3,14$ (por defecto)
- Truncamiento de las milésimas $\rightarrow \pi \approx 3,131+0,001=3,142$ (por exceso)

Ejercicio: aproximar por redondeo los siguientes números en el orden que se indica:

a) A=1,99534… en las centésimas
b) A=-3,21951… en las milésimas
c) A=√2 =1,4142… en las décimas
d) A=132,345….en las milésimas

Solución:

a) B=1,99+0,01=2'00
b) B=-(3,219+0,001)=-3,220
c) B=1,4
d) No se puede aproximar por redondeo pues no conocemos el valor de la cifra posterior a las milésimas.

1.3. Control del error cometido en las aproximaciones

1.3.1. Error absoluto

Cuando aproximamos estamos cometiendo un error, siendo la diferencia entre el valor exacto y el aproximado. Al error exacto lo denotaremos por E_a, y como hemos explicado su valor es:

$\mathbf{E_a=A-B}$

Según el signo de E_a podemos distinguir entre error por exceso o por defecto:

- Si $E_a>0$ error por defecto
- Si $E_a<0$ error por exceso.

En la práctica no interesa saber de forma exacta el valor del error exacto de una aproximación, es decir E_a, y lo que se utiliza es una cota superior del error. Esta cota superior se denota con la letra K_a:

$\mathbf{|K_a|\geq|E_a|}$

Veamos el valor de K_a en los dos tipos de aproximaciones vistos:

<u>*Cota de error en el truncamiento:*</u> el error cometido en una aproximación por truncamiento siempre es menor que la unidad de la aproximación:

- Aproximación en las unidades: $K_a=1$
- Aproximación en las décimas: $K_a=0,1$
- Aproximación en las centésimas: $K_a=0,01$

…

<u>*Cota de error en el redondeo:*</u> el error cometido en una aproximación por redondeo siempre es menor que la mitad de la unidad en la que aproximamos. Además como no sabemos si es por exceso o defecto esta se escribe con el símbolo ±:

- Aproximación en las unidades: $K_a=\pm0,5$
- Aproximación en las décimas: $K_a=\pm0,05$
- Aproximación en las centésimas: $K_a=\pm0,005$

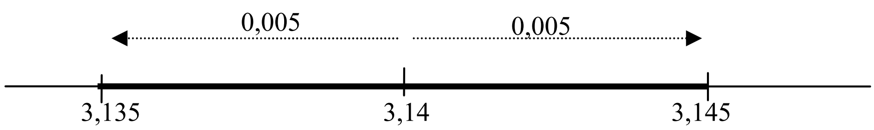
…

En la práctica siempre vamos a trabajar con aproximaciones con redondeo. Veamos la notación correcta a la hora de expresar un número A, con aproximación B y cota de error K_a:

→ **$A \approx B$**
→ **$A = B \pm K_a$**

Ejemplo: $A=\pi$, $B=3{,}14$, $K_a=0{,}005$ → $\pi \approx 3{,}14$, $\pi = 3{,}14 \pm 0{,}005$

La igualdad $A=B\pm K_a$ indica que el valor exacto A comprendido entre $B-K_a$ y $B+K_a$, es decir $A \in (B-K_a, B+K_a)$. Veámoslo gráficamente con el ejemplo anterior



Esto implica que todo número exacto A que se encuentre en el intervalo (3,135, 3,145) su aproximación es B=3,14. **Compruébalo con algún ejemplo**

1.3.2. Error relativo

Antes de definir el error relativo veamos un ejemplo. Medimos una carretera con aproximación de metros, tal que tras medir tenemos la siguiente información B=10000 m, K_a=1m. Medimos la altura de una casa con misma aproximación tal que B=10m, K_a=1m. El error absoluto es el mismo, pero no es lo mismo tener un error en una medida de 10m que en otra de 10000. Para medir el error en función del valor de la medida se utiliza en error relativo.

El error relativo es el cociente entre el error absoluto y la medida, se denota como E_r. El error relativo nos informa del error en función de la medida.

$$E_r = \frac{K_a}{B}$$

Veamos los valores en el ejemplo expuesto anteriormente:

- Longitud carretera $E_r = \dfrac{1}{10000} = 0{,}0001$
- Altura de la casa $E_r = \dfrac{1}{10} = 0{,}1$

1.4. Operaciones con números aproximados.

Cuando operamos con números aproximados los errores pueden aumentar (por ejemplo si sumamos dos aproximaciones con error por exceso), disminuir (por ejemplo si sumamos dos aproximaciones una por defecto y otra por exceso). Es difícil conocer el error exacto, por lo que en las operaciones se trabaja también con una cota superior de los errores, poniéndonos en el caso más pesimista. Así aseguramos que el error considerado será siempre mayor o igual al error exacto. Veamos como obtener el error en las diferentes operaciones:

***Suma y diferencia**:* la cota del error cometido es igual a la suma de los errores. Veamos porque:

$(B_1 \pm K_{a1}) + (B_2 \pm K_{a1}) = (B_1+B_2) \pm (K_{a1}+K_{a2})$

$\mathbf{K_{suma}=(K_{a1}+K_{a2})}$

$(B_1 \pm K_{a1}) - (B_2 \pm K_{a1}) = (B_1-B_2) \pm (K_{a1}+K_{a2})$

$\mathbf{E_{r,suma}=K_{suma}/(B_1+B_2)= (K_{a1}+K_{a2})/ (B_1+B_2)}$

$(B_1 \pm K_{a1}) - (B_2 \pm K_{a1}) = (B_1-B_2) \pm (K_{a1}+K_{a2})$

$\mathbf{K_{resta}=(K_{a1}+K_{a2})}$

$\mathbf{E_{r,suma}=K_{suma}/(B_1-B_2)= (K_{a1}+K_{a2})/ (B_1-B_2)}$

Ejemplo: $A_1=\pi$, $A_2=\sqrt{2}$ $\rightarrow B_1=3{,}14\pm0{,}005$, $B_2=1{,}414\pm0{,}0005$
$B_{suma}=B_1+B_2=4{,}554$, $K_{suma}=0{,}0055$
$A_1+A_2=4{,}554\pm0{,}0055$

Producto: en el producto la cota de error es más compleja que en la suma.

$(B_1 \pm K_{a1})\cdot(B_2 \pm K_{a1}) = (B_1\cdot B_2) \pm (B_1\cdot K_{a2}+B_2\cdot K_{a1}+K_{a1}\cdot K_{a2})$

$\mathbf{K_{producto}=(B_1\cdot K_{a2}+B_2\cdot K_{a1}+K_{a1}\cdot K_{a2})}$

$\mathbf{E_{r,prod}= K_{producto}/(B_1\cdot B_2)=E_{r1}+ E_{r2}+ E_{r1}\cdot E_{r2}}$

Ejemplo: $A_1=\pi$, $A_2=\sqrt{2}$ $\rightarrow B_1=3{,}14\pm0{,}005$, $B_2=1{,}414\pm0{,}0005$
$B_{producto}=B_1\cdot B_2=4{,}43996$,
$K_{producto}=0{,}005\cdot1{,}414+0{,}0005\cdot3{,}14+0{,}005\cdot0{,}0005=0{,}0086425$

División: veamos la cota de error en el cociente

$$\frac{B_1 \pm K_{a1}}{B_1 \pm K_{a1}} = \frac{B_1}{B_2} \pm \frac{E_{r1}+E_{r2}}{1-E_{r2}}$$

$\mathbf{K_{cociente}}= \dfrac{E_{r1}+E_{r2}}{1-E_{r2}}$

$\mathbf{E_{rcociente}=K_{cociente}/(B1:B_2)}$

Ejemplo: $A_1=\pi$, $A_2=\sqrt{2}$ $\rightarrow B_1=3{,}14\pm0{,}005$, $B_2=1{,}414\pm0{,}0005$

$B_{cociente}=3{,}14/1{,}414=2{,}2207$ (aproximamos al menor orden de las aproximaciones)

$$K_{cociente}=\frac{\frac{0{,}005}{3{,}14}+\frac{0{,}0005}{1{,}414}}{1-\frac{0{,}0005}{1{,}414}}=0{,}0019 \text{ (aproximamos a la de menor orden)}$$

Ejercicio: aproximar, representar y operar :

a) ***A_1=3,1567… centesimal***

b) ***A_2=0,9517… decimal***

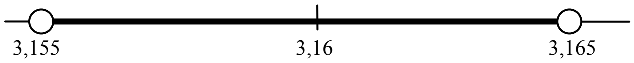
c) ***A_3=√2*** **milesimal**

d) A_2+A_3

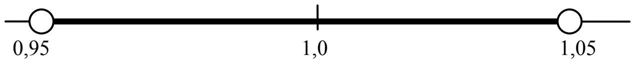
e) $A_1 \cdot A_2$

f) A_1/A_2

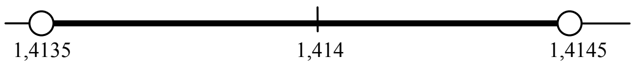
a) $A_1=3{,}16\pm0{,}005$



b) $A_2=1{,}0\pm0{,}05$



c) $A_3=1{,}414\pm0{,}0005$



d) $A_2+A_3=2{,}414\pm0{,}0505$

e) $A_1\cdot A_2=3{,}16\pm0{,}16325$

f) $A_1/A_2=3{,}160\pm0{,}5430$

2. Notación Científica

Fíjate en los siguientes números:

e(carga e^-)=-0,00000000000000000016 C
$d_{pluton—Sol}$=5910000000000m
$gasto_{empresa}$=312600000000 €

Cuando tenemos cantidades muy pequeñas o muy grandes se utiliza la notación científica, consiste en poner un número multiplicado por una potencia de 10. Así los números en notación científica constan de:

- Parte entera formada por una sola cifra ≠0 (1^a cifra del número)
- Parte decimal(formada por el resto de cifras del número)
- Potencia en base 10 que nos informa del orden de magnitud.

$X=a,bcd\ldots\cdot 10^n$

En los ejemplos anteriores:

$e=-1,6\cdot 10^{-19}C$
$d=5,91\cdot 10^{12}m$
$gasto=3,126\cdot 10^{11}€$

La notación científica tiene las siguientes ventajas:

a) Escribimos los números grades y pequeños de forma más abreviada
b) Con una simple mirada al número podemos entender como es de grande o pequeño ese valor.

Otra ventaja de la notación científica es que es muy útil para operar con esta clase de números, en especial cuando las operaciones son el producto o el cociente. Veamos algunos ejemplos:

a) $(5,24\cdot 10^6)\cdot(6,3\cdot 10^8)=(5,24\cdot 6,3)\cdot 10^{14}=33,012\cdot 10^{14}=3,3012\cdot 10^{15}$

b) $\frac{5,24\cdot 10^6}{6,3\cdot 10^{-8}}=(5,24:6,3)\cdot 10^{14}=0,8317\cdot 10^{14}=8,317\cdot 10^{13}$

c) $5,83\cdot 10^9+6,932\cdot 10^{12}-7,5\cdot 10^{10}=5,83\cdot 10^9+6932\cdot 10^9-75\cdot 10^9=(5,83+6932-75)\cdot 10^9=$
$=6862'83\cdot 10^9=6,86283\cdot 10^{12}$

Nota: correr la coma hacia la izquierda es como dividir, luego para no modificar el resultado tendremos que aumentar el exponente de 10 en tantas unidades como veces que corramos la coma. Al revés si corremos la coma hacia la derecha que es como multiplicar y por tanto tendremos que disminuir el exponente de 10 tantas veces como corramos la coma:

coma →	**== restar al exponente nº posiciones desplazada**
coma ←	**== sumar al exponente nº posiciones desplazada**

Utilización de la calculadora en la notación científica

Ejercicio : Calcular y expresar el resultado en notación científica.

a) $7,823\cdot 10^{-5}\cdot 1,84\cdot 10^{18}$

b) $2,35\cdot 10^8+1,43\cdot 10^7$

Solución

a) $7,823\cdot 10^{-5}\cdot 1,84\cdot 10^{18}=14,39432\cdot 10^{13}=1,439432\cdot 10^{14}$

b) $2,35\cdot 10^8+1,43\cdot 10^7=23,5\cdot 10^7+1,43\cdot 10^7=24,93\cdot 10^7=2,493\cdot 10^8$

Ejercicio(6 pag 37) Expresar en notación científica:

a) 4230000000$=4,23\cdot 10^9$
b) 0,00000004$=4\cdot 10^{-8}$
c) 84300$=8,43\cdot 10^4$
d) -0,000572$=-5,72\cdot 10^{-4}$

Ejercicio (10 pag 37) Calcular y expresar el resultado en notación científica:

a) $(3\cdot10^{-7})\cdot(8\cdot10^{18})$
c) $(5\cdot10^{12}):(2\cdot10^{-3})$
d) $(5\cdot10^{9})^{2}$
f) $3{,}1\cdot10^{12}+2\cdot10^{10}$

Solución

a) $(3\cdot10^{-7})\cdot(8\cdot10^{18})=24\cdot10^{11}=2{,}4\cdot10^{12}$
c) $(5\cdot10^{12}):(2\cdot10^{-3})=10\cdot10^{9}=10^{10}$

d) $(5\cdot10^{9})^{2}=25\cdot10^{18}=2{,}5\cdot10^{19}$

f) $3{,}1\cdot10^{12}+2\cdot10^{10}=310\cdot10^{10}+2\cdot10^{10}=312\cdot10^{10}=3{,}12\cdot10^{12}$

Ejercicio (13 pag 37) Calcular y expresar el resultado en notación científica:

a) $\dfrac{30\cdot10^{-4}+7\cdot10^{-4}}{10\cdot10^{5}-5\cdot10^{5}}$

b) $\dfrac{7{,}35\cdot10^{4}}{5\cdot10^{-3}}+3{,}2\cdot10^{7}$

c) $(4{,}3\cdot10^{3}-7{,}2\cdot10^{5})^{2}$

Solución

a) $7{,}4\cdot10^{-9}$
b) $4{,}67\cdot10^{7}$
c) $5{,}12\cdot10^{11}$

3. Potencias y Radicales

En este apartado aprenderemos a usar la calculadora además de operar sin ella.

3.1. Potencias de exponente natural

<u>Definición:</u> se llama potencia en base $a\in R$ y exponente $n\in N$ y se denota a^{n} al producto de n veces a:

$a^{n}=\underbrace{a\cdot a\ldots\cdot a}_{\text{n veces}}$

<u>Ejemplo</u>:
$5^{4}=5\cdot5\cdot5\cdot5=725$
$(-1{,}2)^{4}=(-1{,}2)\cdot(-1{,}2)\cdot(-1{,}2)\cdot(-1{,}2)=2{,}0736$

$$(-a)^{n}\begin{cases}+ & si\ \ n\ \ par\\ - & si\ \ n\ \ es\ \ impa\end{cases}$$

<u>Propiedades:</u>(demostrar)

1) $\left((a)^{n}\right)^{m}=a^{n\cdot m}$ → ej: $(3^{3})^{2}=9^{2}=81=3^{4}$
2) $a^{n}\cdot a^{m}=a^{n+m}$ → ej: $2^{3}\cdot2^{4}=8\cdot16=64=2^{7}$
3) $\dfrac{a^{m}}{a^{n}}=a^{m-n}$ → ej: $\dfrac{4^{3}}{4^{2}}=\dfrac{64}{16}=4=4^{1}$

4) $a^0=1 \rightarrow$ ej: $5^0 = \frac{5^3}{5^3} = 1$

5) $a^1=a \rightarrow$ ej: $1{,}3^1=1{,}3$

6) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \rightarrow$ ej: $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2^3}{3^3}$

7) $(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n \rightarrow$ ej: $(2\cdot 3)^2=6^2=4\cdot 9=2^2\cdot 3^2$

Nota: estas propiedades son ciertas también cuando el exponente no es natural

3.2. Exponente entero (negativo)

En este apartado vamos a estudiar las potencias cuando el exponente es un número entero negativo. Veamos el significado de a^{-n}:

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

Demostración: $a^n\cdot a^{-n}=a^0=1 \rightarrow a^n\cdot a^{-n}=1 \rightarrow a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Ejemplos:

$(-5)^{-3}=\frac{1}{(-5)^3} = -\frac{1}{125}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

3.3. Potencias de exponente fraccionario. Radicales

En los apartados anteriores hemos estudiado las potencias cuando los exponentes eran o bien números naturales o enteros. Nos falta ahora entender el significado cuando la potencia es una fracción. Veamos el significado de $a^{\frac{n}{p}}$

$$\boxed{a^{\frac{n}{p}} = \sqrt[p]{a^n}}$$

Ejemplos:

$(-3)^{4/5} = \sqrt[5]{(-3)^4} = \sqrt[5]{81}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2/3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} = \sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{9}{4}}$

La ventaja de poner una raíz como potencia fraccionaria es que cuando este está representado mediante una potencia podremos aplicar las propiedades de las potencias visto en el apartado 3.1

Ejemplos:

a) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}=7^{\frac{1}{2}}\cdot 7^{\frac{1}{2}}=7^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=7^{1}=7$

b) $\sqrt[3]{5^{6}}=5^{\frac{6}{3}}=5^{2}=25$

c) $\frac{1}{\sqrt[5]{4}}=\frac{1}{4^{\frac{1}{5}}}=4^{-\frac{1}{5}}$

d) $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt[4]{16}}=\frac{16^{\frac{1}{2}}}{16^{\frac{1}{4}}}=16^{\frac{1}{2}}\cdot 16^{-\frac{1}{4}}=16^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}=16^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{16}=\pm 2$

Ejercicio, expresar como potencia única y radical (24 pagina 39)

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}=3^{\frac{5}{6}}=\sqrt[6]{3^{5}}$

b) $2\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{4}}=2\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2^{2}}}=2\cdot\sqrt[3]{2^{-2}}=2\cdot 2^{-\frac{2}{3}}=2^{1-\frac{2}{3}}=2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}$

c) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt[3]{4}}=\frac{\sqrt{2^{3}}}{\sqrt[3]{2^{2}}}=\frac{2^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{2}{3}}}=2^{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}}=2^{\frac{5}{6}}=\sqrt[6]{2^{5}}$

d) $\frac{\sqrt[3]{a^{8}}}{a^{2}}=\frac{a^{\frac{8}{3}}}{a^{2}}=a^{\frac{8}{3}-2}=a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^{2}}$

e) $\sqrt[3]{\frac{1}{a^{2}}}=\left(\frac{1}{a^{2}}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{a}\right)^{2\cdot\frac{1}{3}}=\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{2}{3}}=a^{-\frac{2}{3}}$

f) $a\cdot\sqrt{\frac{1}{a}}=a\sqrt{a^{-1}}=a\cdot a^{-\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$

Ejercicio, calcular el valor aproximado con la calculadora (25 pagina 39)

a) $\sqrt[5]{9{,}5^{2}}=2{,}46\ldots$

b) $\sqrt[3]{-173}=-5{,}57\ldots$

c) $\sqrt[4]{\left(\frac{14}{9}\right)^{3}}=1{,}39\ldots$

d) $\sqrt[4]{5^{-9}}=0{,}0267\ldots$

e) $28^{\frac{3}{4}}=12{,}17\ldots$

f) $8^{-\frac{1}{3}}=0{,}5$

g) $0{,}03^{-\frac{3}{2}}=192{,}45\ldots$

h) $\left(\sqrt[5]{0{,}0025}\right)^{-1}=5{,}3\ldots$

i) $\sqrt{-2}\rightarrow$ *no existe*

Ejercicio, expresar en forma de exponencial (26 pagina 39)

a) $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$

b) $\left(\sqrt[5]{a^2}\right)^3 = \left(a^{\frac{2}{5}}\right)^3 = a^{\frac{6}{5}}$

c) $\sqrt[8]{a^5 \cdot a^2} = \sqrt[8]{a^7} = a^{\frac{7}{8}}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}} = \sqrt[3]{x^{\frac{1}{4}}} = \left(x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{x}$

e) $\left(\sqrt{a}\right)^{-3} = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{-3} = a^{-\frac{3}{2}}$

g) $\left(\sqrt[4]{a^2}\right)^2 = \left(a^{\frac{2}{4}}\right)^2 = a^{\frac{4}{4}} = a$

Ejercicio, expresar en forma de raíz (27 pagina 39)

b) $(a^2)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$

c) $(x^{-1})^{\frac{5}{4}} = x^{-\frac{5}{4}} = \frac{1}{x^{\frac{5}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{x^5}}$

d) $\left(a^{\frac{1}{5}}\right)^{-4} = a^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{a^{\frac{4}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{a^4}}$

e) $\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$

g) $\left(3^{-\frac{2}{5}}\right)^{\frac{10}{3}} = 3^{-\frac{2}{5}\cdot\frac{10}{3}} = 3^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{3^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{3^4}}$

h) $2^{1,\hat{3}} = 2^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{2^4}$

3.3.1. Radicales equivalente

Observa las siguientes igualdades:

$3 = \sqrt{3^2} = \sqrt[3]{3^3} = \sqrt[4]{3^4} = \ldots = \sqrt[n]{a^n}$, se dice que todos estos radicales son equivalentes

Veámoslo en forma de potencia:

$3 = 3^{\frac{2}{2}} = 3^{\frac{3}{3}} = 3^{\frac{4}{4}} = \ldots = 3^{\frac{n}{n}}$

Definición: dos radicales son equivalentes si expresados en forma exponencial los exponentes son fracciones equivalentes:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[p]{a^q} \leftrightarrow a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{p}{q}} \leftrightarrow \frac{m}{n} = \frac{p}{q}$$

Construcción de radicales equivalentes: a veces nos interesa tener un radical equivalente para operar, veamos como generar radicales equivalentes:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n\cdot k]{a^{m\cdot k}}$$

ejemplo: $\sqrt[3]{a^4} = \sqrt[6]{a^8}$

Esta propiedad es muy útil para:

1) Simplificar radicales: $\sqrt[8]{2^4}=\sqrt{2}$

2) Productos de radicales: $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[5]{2}=\sqrt[15]{2^5}\sqrt[15]{2^3}=\sqrt[15]{2^8}$ (se puede hacer en forma de potencia fraccionaria, $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[5]{2}=2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{1}{5}}=2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}=2^{\frac{8}{15}}=\sqrt[15]{2^8}$)

Ejercicio: simplificar los siguientes radicales:

a) $\sqrt[8]{625}=\sqrt[8]{5^4}=\sqrt{5}$

b) $\sqrt[12]{64000}=\sqrt[12]{2^9\cdot 5^3}=\sqrt[12]{\left(2^3\cdot 5\right)^3}=\sqrt[4]{40}$

Ejercicio: reduce al mismo índice los siguientes grupos de radicales

a) $\sqrt[4]{6}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{2}$ → mcd(4,3,2)=12

$\sqrt[12]{6^3}$, $\sqrt[12]{3^6}$, $\sqrt[12]{2^4}$

b) $\sqrt[6]{8}$, $\sqrt[5]{3}$, $\sqrt[3]{6}$ → mcd(6,5,3)=30

$\sqrt[30]{8^5}$, $\sqrt[30]{3^6}$, $\sqrt[30]{6^{10}}$

3.3.2. Operaciones con radicales

Veremos primero como operar con radicales con mismo índice. Estas propiedades se pueden entender si expresamos las raíces como potencias fraccionarias.

1) <u>Multiplicación:</u> $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$ → $a^{1/n}\cdot b^{1/n}=(a\cdot b)^{1/n}$

Ejemplo: $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{7}=\sqrt[3]{14}$

2) <u>División:</u> $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ → $\frac{a^{1/n}}{b^{1/n}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{1/n}$

Ejemplo: $\frac{\sqrt[3]{14}}{\sqrt[3]{7}}=\sqrt[3]{2}$

3) <u>Potencia:</u> $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$ → $\left(a^{1/n}\right)^m=a^{m/n}$

Ejemplo: $\left(\sqrt[5]{2}\right)^3=\sqrt[5]{8}$

4) <u>Raiz:</u> $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$ → $\left(a^{1/n}\right)^{1/m}=a^{1/(m\cdot n)}$

Ejemplo: $\sqrt{\sqrt[5]{2}}=\sqrt[10]{2}$

5) Suma → ¡¡¡no se pueden sumar raíces que no sean iguales!!!

Ejemplo: $\sqrt{2}+\sqrt{3}\neq\sqrt{5}$

Cuando multiplicamos o dividimos radicales, para operar con ellos es necesario que tengan mismo índice, por esto tendremos que buscar radicales equivalentes con mismo índice. Otra forma es utilizar potencias fraccionarias y las propiedades de las potencias.

Ejemplos:

1) $\sqrt[5]{2}\cdot\sqrt[3]{5}=\sqrt[15]{2^3}\cdot\sqrt[15]{5^5}=\sqrt[15]{2^3\cdot5^5}=\sqrt[15]{8\cdot3125}=\sqrt[15]{25000}$

$2^{1/5}\cdot5^{1/3}=2^{3/15}\cdot5^{5/15}=\left(2^3\cdot5^5\right)^{1/15}=(25000)^{1/15}=\sqrt[15]{25000}$

2) $\dfrac{\sqrt[4]{x^2y^3}}{\sqrt[3]{xy}}=\dfrac{\sqrt[12]{\left(x^2y^3\right)^3}}{\sqrt[12]{(xy)^4}}=\dfrac{\sqrt[12]{\left(x^6y^9\right)}}{\sqrt[12]{x^4y^4}}=\sqrt[12]{\dfrac{x^6y^9}{x^4y^4}}=\sqrt[12]{x^2y^5}$

3.3.3. Introducción y extracción de factores en un radical.

1) Extracción: cuando podemos expresar el radical como producto de factores elevados a exponentes, de forma que algún exponente es mayor que el índice del radical, este factor se puede extraer de la raíz de la siguiente forma:

$\sqrt{360}=\sqrt{2^3\cdot3^2\cdot5}=\sqrt{2^2\cdot2\cdot3^2\cdot5}=2\cdot3\sqrt{10}=6\sqrt{10}$

$\sqrt[4]{1536}=\sqrt[4]{2^9\cdot3}=\sqrt[4]{2^8\cdot2\cdot3}=2^2\sqrt[4]{6}=4\sqrt[4]{6}$

$\sqrt[3]{6750}=\sqrt[3]{2\cdot5^3\cdot3^3}=15\sqrt[3]{2}$

Ejercicio: extraer todos los factores posibles:

a) $\sqrt{512}=\sqrt{2^9}=2^4\sqrt{2}=16\sqrt{2}$

b) $\sqrt[3]{216}=\sqrt[3]{2^3\cdot3^3}=6$

c) $\sqrt[4]{405}=\sqrt[4]{5\cdot3^4}=3\sqrt[4]{5}$

d) $\sqrt{6250}=\sqrt{2\cdot5^5}=5^2\sqrt{2\cdot5}=25\sqrt{10}$

2)Introducción: para introducir factores dentro de una raíz tendremos que elevar este factor al índice de la raíz. Veamos algunos ejemplos:

$5\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{3\cdot5^3}=\sqrt[3]{375}$

$2^2\sqrt{5}=\sqrt{2^4\cdot5}=\sqrt{80}$

$\dfrac{\sqrt[3]{81}}{3}=\sqrt[3]{\dfrac{81}{3^2}}=\sqrt[3]{3}$

Ejercicio: introducir dentro de los radicales:

a) $\frac{\sqrt[3]{810}}{3}=\sqrt[3]{\frac{810}{3^3}}=\sqrt[3]{30}$

b) $\frac{\sqrt[4]{320}}{2}=\sqrt[4]{\frac{320}{2^4}}=\sqrt[4]{20}$

c) $\frac{\sqrt{83}}{4}=\sqrt{\frac{83}{4^2}}=\sqrt{\frac{83}{16}}$

d) $5\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2\cdot 5^3}=\sqrt[3]{250}$

3.3.4. Suma de radicales

Para sumar o restar radicales es necesario que estos tengan mismo índice y mismo radicando, es decir sean iguales. Veamos como se suman o restan:

$a\cdot\sqrt[n]{c}\pm b\cdot\sqrt[n]{c}=(a\pm b)\cdot\sqrt[n]{c}$

Ejemplos:

a) $3\cdot\sqrt{3}-2\cdot\sqrt{3}+5\cdot\sqrt{3}=(3-2+5)\cdot\sqrt{3}=6\cdot\sqrt{3}$

b) $3\cdot\sqrt[3]{2}-4\cdot\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}=3\cdot\sqrt[3]{2}-4\cdot\sqrt[3]{2\cdot 2^3}+\sqrt[3]{2\cdot 3^3}=3\cdot\sqrt[3]{2}-8\cdot\sqrt[3]{2}+3\cdot\sqrt[3]{2}=-2\cdot\sqrt[3]{2}$

Ejercicio, operar:

a) $\sqrt{12}-\sqrt{27}+3\cdot\sqrt{48}=2\cdot\sqrt{3}-3\cdot\sqrt{3}+12\cdot\sqrt{3}=11\cdot\sqrt{3}$

b) $3\cdot\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{375}+\sqrt[3]{648}=2\cdot 3\cdot\sqrt[3]{3}-5\cdot\sqrt[3]{3}+6\cdot\sqrt[3]{3}=5\cdot\sqrt[3]{3}$

c) $3\cdot\sqrt[4]{32}-5\cdot\sqrt[4]{162}+\sqrt[4]{512}=3\cdot 2\cdot\sqrt[4]{2}-5\cdot 3\cdot\sqrt[4]{2}+4\cdot\sqrt[4]{2}=-5\cdot\sqrt[4]{2}$

3.4. Racionalización

Definición: racionalizar una fracción consiste en hallar una fracción equivalente sin radicales en el denominador.

Tipos de racionalizaciones:

a) Raíz cuadrada en el denominador: $\frac{a}{c\cdot\sqrt{b}}$. Procedimiento: multiplicar denominador y numerador por la raíz del denominador $\frac{a\cdot\sqrt{b}}{c\cdot\sqrt{b}\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{cb}$

Ejemplo: $\frac{10}{3\cdot\sqrt{5}}=\frac{10\sqrt{5}}{3\cdot\sqrt{5}\sqrt{5}}=\frac{10\sqrt{5}}{15}=\frac{2\sqrt{5}}{3}$

b) Raíz índice n en el denominador: $\frac{a}{c\cdot\sqrt[n]{b}}$. Procedimiento: multiplicar denominador y numerador por la raíz del denominador con el radical elevado a n-1 → $\frac{a}{c\cdot\sqrt[n]{b}}=\frac{a\cdot\sqrt[n]{b^{n-1}}}{c\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{b^{n-1}}}=\frac{a\cdot\sqrt[n]{b^{n-1}}}{c\cdot b}$

Ejemplo: $\frac{7}{3\cdot\sqrt[4]{3}}=\frac{7\cdot\sqrt[4]{3^3}}{3\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{3^3}}=\frac{7\cdot\sqrt[4]{3^3}}{3\cdot 3}=\frac{7\cdot\sqrt[4]{3^3}}{9}$

c) Suma o diferencia de dos raíces cuadradas en el denominador. $\frac{a}{\sqrt{b}\pm\sqrt{c}}$.
Procedimiento multiplicar numerador y denominador por el conjugado (si están sumando por la diferencia y si están restando por la suma)

$$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{a\cdot(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{b}-\sqrt{c})}=\frac{a\cdot(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{b})^2-(\sqrt{c})^2}=\frac{a\cdot(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{b-c}$$

Ejemplo: $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\frac{5\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(\sqrt{3}-\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{5})}=\frac{5\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{3-5}=-\frac{5\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{2}$

Ejercicio, racionaliza:

a) $\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2\cdot\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

b) $\frac{3}{5\cdot\sqrt[3]{2}}=\frac{3\cdot\sqrt[3]{2^2}}{5\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2^2}}=\frac{3\cdot\sqrt[3]{2^2}}{5\cdot\sqrt[3]{2^3}}=\frac{3\cdot\sqrt[3]{2^2}}{5\cdot 2}=\frac{3\cdot\sqrt[3]{2^2}}{10}$

c) $\frac{4}{\sqrt[4]{8}}=\frac{4\cdot\sqrt[4]{8^3}}{\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[4]{8^3}}=\frac{4\cdot\sqrt[4]{8^3}}{8}=\frac{\sqrt[4]{8^3}}{2}$ o $\frac{4}{\sqrt[4]{2^3}}=\frac{4\cdot\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{2^3}}=\frac{4\cdot\sqrt[4]{2}}{2}=2\cdot\sqrt[4]{2}$

d) $\frac{4}{3-\sqrt{2}}=\frac{4\cdot(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})\cdot(3+\sqrt{2})}=\frac{12+4\sqrt{2}}{9-2}=\frac{12+4\sqrt{2}}{7}$

e) $\frac{2}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}=\frac{2\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{3})}=\frac{2\cdot(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{6-3}=\frac{2\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{3}$

f) $\frac{6}{\sqrt{2+\sqrt{5}}}=\frac{6\sqrt{2+\sqrt{5}}}{\sqrt{2+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{5}}}=\frac{6\sqrt{2+\sqrt{5}}}{2+\sqrt{5}}=\frac{6\cdot(2-\sqrt{5})\sqrt{2+\sqrt{5}}}{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})}=\frac{6\cdot(2-\sqrt{5})\sqrt{2+\sqrt{5}}}{4-5}=$
$-6\cdot(2-\sqrt{5})\sqrt{2+\sqrt{5}}$

Ejercicios finales:

Ejercicio 10 pag 38, operar con y sin calculadora comprobando el resultado

- **a)** $(3\cdot10^{-7})\cdot(8\cdot8\cdot10^{18})=26{,}4\cdot10^{11}=2{,}64\cdot10^{12}$
- **c)** $(5\cdot10^{12}):(2\cdot10^{3})=2{,}5\cdot10^{9}$
- **d)** $(5\cdot10^{9})^{2}=25\cdot10^{18}=2{,}5\cdot10^{19}$
- **e)** $(4\cdot10^{5})^{-2}=(4^{-2})\cdot10^{-10}=0{,}0625\cdot10^{-10}=6{,}25\cdot10^{-12}$
- **f)** $3{,}1\cdot10^{12}+2\cdot10^{10}=310\cdot10^{10}+2\cdot10^{10}=312\cdot10^{10}=3{,}12\cdot10^{12}$

Ejercicio 24 pag 39, expresar como potencia única:

Podemos hacerlo pasando las raíces a potencias fraccionarias o bien poniendo las raíces todas con mismo índice (raíces equivalentes)

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{3^3}\cdot\sqrt[6]{3^2}=\sqrt[6]{3^3\cdot3^2}=\sqrt[6]{3^5}=3^{\frac{5}{6}}$

b) $2\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{4}}=2\cdot\sqrt[3]{2^{-2}}=2\cdot2^{-2/3}=2^{1-2/3}=2^{1/3}=\sqrt[3]{2}$

c) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt[3]{4}}=\frac{2^{3/2}}{2^{2/3}}=2^{3/2-2/3}=2^{5/6}=\sqrt[6]{2^5}$

d) $\frac{\sqrt[3]{a^8}}{a^2}=\frac{\sqrt[3]{a^8}}{\sqrt[3]{a^6}}=\sqrt[3]{a^2}=a^{2/3}$

e) $\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}}=a^{-2/3}$

f) $a\sqrt{\frac{1}{a}}=a\cdot a^{-1/2}=a^{1/2}=\sqrt{a}$

Ejercicio 26 pag 39, expresar en forma exponencial:

a) $\sqrt[3]{x^2}=x^{2/3}$

b) $\left(\sqrt[5]{a^2}\right)^3=\left(a^{2/5}\right)^3=a^{6/5}$

c) $\sqrt[8]{a^5\cdot a^2}=a^{7/8}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}}=\sqrt[12]{x}=x^{1/12}$

e) $\left(\sqrt{a}\right)^{-3}=a^{-3/2}$

f) $\sqrt[6]{a^3}=a^{3/6}=a^{1/2}$

g) $\left(\sqrt[4]{a^2}\right)^2=\left(a^{2/4}\right)^2=a$

h) $\sqrt[5]{a^{10}}=a^{5/10}=a^{1/2}$

Ejercicio 27 pag 39, expresar en forma de raíz:

b) $(a^2)^{1/3} = \sqrt[3]{a^2}$

c) $(x^{-1})^{5/4} = x^{-5/4} = \sqrt[4]{x^{-5}} = \sqrt[4]{\dfrac{1}{x^5}}$

d) $\left(a^{2/3}\right)^{1/2} = a^{1/3} = \sqrt[3]{a}$

g) $(3^{-2/5})^{10/3} = 3^{-20/15} = 3^{-4/3} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{3^4}}$

h) (no en el libro) $2^{1,\widehat{3}} = 2^{4/3} = \sqrt[3]{2^4} = 2\sqrt[3]{2}$

Ejercicio 28 pag39, expresa como potencia única

a) $\dfrac{\sqrt[3]{a^7}}{a^4} = \dfrac{a^{7/3}}{a^4} = a^{7/3-4} = a^{-5/3}$

c) $\dfrac{\sqrt{125}}{\sqrt[3]{25}} = \dfrac{5^{3/2}}{5^{2/3}} = 5^{3/2-2/3} = 5^{5/6}$

f) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{a^2}\cdot\dfrac{a^3}{\sqrt{a}} = \dfrac{a^{2/3}\cdot a^3}{a^2\cdot a^{1/2}} = a^{\frac{2}{3}+3-2-\frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{6}}$

Ejercicio 30 pag 39, simplifica los siguientes radicales

a) $\sqrt[6]{5^3} = \sqrt{5}$

e) $\sqrt[8]{(x^2y^2)^2} = \sqrt[8]{(xy)^4} = \sqrt{xy}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^5\cdot x^7}} = \sqrt[12]{x^{12}} = x$

Ejercicio 31 pag 39, extraer factores de los siguientes radicales

a) $\sqrt[3]{16x^6} = \sqrt[3]{2^4x^6} = 2x^2\sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt{\dfrac{28x^5}{75y^3}} = \sqrt{\dfrac{2^2 3^2 x^5}{5^3 y^3}} = \dfrac{2\cdot 3\cdot x^2}{5\cdot y}\sqrt{\dfrac{x}{5y}} = \dfrac{6\cdot x^2}{5\cdot y}\sqrt{\dfrac{x}{5y}}$

f) $\sqrt{\dfrac{32a^3}{45b^4}} = \sqrt{\dfrac{2^5a^3}{3^2\cdot 5b^4}} = \dfrac{2^2a}{3b^2}\sqrt{\dfrac{2a}{5}}$

Ejercicio 36 pag 40, suma:

a) $\sqrt{3}+\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{5\sqrt{3}}{3}=(1+\frac{3}{4}-\frac{5}{3})\sqrt{3}=\frac{12+9-20}{12}\sqrt{3}=\frac{1}{12}\sqrt{3}$

d) $5\sqrt{12}+\sqrt{27}-8\sqrt{75}+\sqrt{48}=5\sqrt{2^2\cdot 3}+\sqrt{3^3}-8\sqrt{5^2\cdot 3}+\sqrt{2^4\cdot 3}=$
$=10\sqrt{3}+3\sqrt{3}-40\sqrt{3}=-27\sqrt{3}$

Ejercicio 38 pag 40, racionaliza y simplifica:

a) $\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

b) $\frac{4}{\sqrt{6}}=\frac{4\sqrt{6}}{6}=\frac{2}{3}\sqrt{6}$

Ejercicio 40 pag 40, racionaliza y simplifica:

a) $\frac{3}{\sqrt[3]{5}}=\frac{3\cdot\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{5^2}}=\frac{3\cdot\sqrt[3]{5^2}}{5}$

b) $\frac{1}{\sqrt[8]{a^5}}=\frac{\sqrt[8]{a^3}}{\sqrt[8]{a^5}\cdot\sqrt[8]{a^3}}=\frac{\sqrt[8]{a^3}}{a}$

Ejercicio 41 pag 40, racionaliza y simplifica:

a) $\frac{2}{1+\sqrt{2}}=\frac{2(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})\cdot(1-\sqrt{2})}=\frac{2-2\sqrt{2}}{-1}=-2+2\sqrt{2}$

b) $\frac{14}{3-\sqrt{2}}=\frac{14\cdot\left(3+\sqrt{2}\right)}{\left(3-\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{2}\right)}=\frac{14\cdot\left(3+\sqrt{2}\right)}{1}$

g) $\frac{10}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{10\cdot\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}=\frac{10\cdot\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{12-2}=\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$

Ejercicio 55 pag 40, racionaliza y simplifica:

a) $\frac{2-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{\left(2-\sqrt[3]{2}\right)\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2^2}}=\frac{2\sqrt[3]{4}-2}{2}=\sqrt[3]{4}-1$

b) $\frac{3\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}+2}=\frac{\left(3\sqrt{6}+2\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{3}-2\right)}{\left(3\sqrt{3}+2\right)\left(3\sqrt{3}-2\right)}=\frac{9\sqrt{18}-6\sqrt{6}+6\sqrt{6}-4\sqrt{2}}{27-4}=\frac{9\sqrt{18}-4\sqrt{2}}{23}=$
$=\frac{9\cdot 3\sqrt{2}-4\sqrt{2}}{23}=\sqrt{2}$

c) $\left(\dfrac{4\sqrt{15}-2\sqrt{21}}{2\sqrt{5}-\sqrt{7}}\right)=\left(\dfrac{4\sqrt{3\cdot5}-2\sqrt{7\cdot3}}{2\sqrt{5}-\sqrt{7}}\right)=\left(\dfrac{2\sqrt{3}\left(2\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)}{2\sqrt{5}-\sqrt{7}}\right)=2\sqrt{3}$

d) $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)}=\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x^2-x^2+1}=x-\sqrt{x^2-1}$