Tema 4. Experimentos aleatorios. Cálculo de probabilidades.

Indice

1. Tipos de sucesos. Sucesos probabilísticos.

Cuando realizamos un experimento podemos distinguir entre tres tipos según la capacidad de conocer el resultado final del mismo:

- ***Experimentos deterministas***: cuando conocemos las condiciones iniciales del mismo el resultado final está fijado y en un principio podemos conocerlo. Son sucesos de índole físico, si tiramos una piedra sabremos que esta caerá y podemos conocer incluso el tiempo que está en el aire, o químicos si ponemos dos sustancias a reaccionar sabremos si estas interactúan y en qué medida.
- ***Experimentos probabilísticos:*** cuando es imposible saber lo que ocurrirá a ciencia cierta aun conociendo perfectamente las condiciones iniciales. Si lanzo una moneda, o un dado; el resultado de un partido de futbol… En estos sucesos lo único que podemos es estimar la posibilidad de que ocurra (probabilidad) uno u otro de los posibles resultados.
- ***Experimentos cuasi-pirobalísticos:*** son sucesos que son deterministas, pero son tantas las variables que influyen que es imposible fijar lo que va a ocurrir. El ejemplo más claro es el de la física atmosférica que pronostica el estado del tiempo.

En este tema nos centraremos en los sucesos probabilísticos. Primero estudiaremos el álgebra de Boole, que nos explica las relaciones entre los diferentes conjuntos (que serán los distintos posibles sucesos que pueden ocurrir en un experimento probabilístico); luego las distintas formas de calcular la probabilidad y las propiedades de ésta.

2. Álgebra de Boole.

2.1. Definiciones

Partimos de un conjunto ***E***, espacio muestral o conjunto completo (***suceso seguro*** cuando nos centremos en la probabilidad). El conjunto completo está formado por los ***sucesos elementales***, $E=\{E_1, E_2,\dots, E_n\}$.

Para centrarnos en el tema de la probabilidad pongamos un ejemplo de un experimento probabilístico, lanzar un dado: los sucesos elementales son cada uno de los posibles resultados 1, 2, 3, 4, 5, 6. Luego el suceso seguro E={1, 2, 3, 4, 5, 6}

Veamos algunas definiciones del álgebra de Boole centradas en la probabilidad y relaciónemelas con el ejemplo del lanzamiento de un dado.

Suceso: un suceso es todo subconjunto de E, es decir todo conjunto formado por elementos de E. Se suelen denotar con letras mayúsculas (A, B, C…). Veamos algún ejemplo relativo al ejemplo del lanzamiento de un dado: A="salga un valor par"=$\dot{2}$={2, 4, 6}; B="nº primo"={2,3,5}; C="menor o igual que 4"={1,2,3,4}

Suceso imposible o conjunto vacio: es el conjunto que no tiene ningún elemento elemental, desde el punto de vista de la probabilidad es imposible que ocurra. Se denota como $\varnothing$.

Potencia de E, Ω=P(E): es el conjunto formado por todos los posibles subconjuntos o sucesos de E, incluidos el conjunto vacio y el propio E. Veamos el conjunto potencia de lanzar una moneda (C=cara X=cruz) Ω=P(E)={$\varnothing$, (C), (X), E=(C,X)}

2.2. Operaciones. Tipos de sucesos

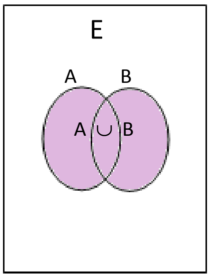
Sean dos sucesos $A, B\in P(E)$, definimos las siguientes operaciones:

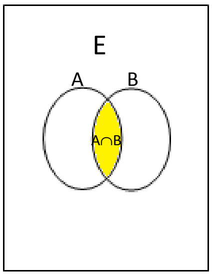
- ***Unión de sucesos***: la unión de dos sucesos $A\cup B$ es el suceso formado por todos los sucesos elementales comunes o no comunes a A y B: $A\cup B=\{E_i\in E: E_i\in A$ **ó** $E_i\in B\}$
- ***Intersección de sucesos***: la intersección de dos sucesos $A\cap B$ es otro suceso formado por los sucesos elementales comunes a ambos: $A\cap B=\{E_i\in E: E_i\in A$ **y** $E_i\in B\}$
- ***Suceso contrario o complementario***: el suceso contrario al suceso A, se denota como A^c o $\bar{A}$ está formado por los elementos de E que no estén en A: $A^c=\{E_i\in E: E_i\notin A\}$
- **Diferencia de sucesos:** la diferencia de dos sucesos A-B es el conjunto de elementos de A que no están en B. $A-B=\{E_i\in E: E_i\in A$ **y** $E_i\notin B\}$

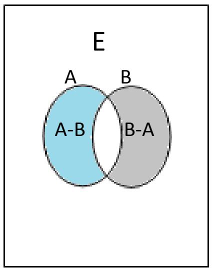
Veamos estas operaciones aplicadas a los siguientes sucesos: A="par"=$\dot{2}$={2,4,6}; B="menor que 4"={1,2,3}:

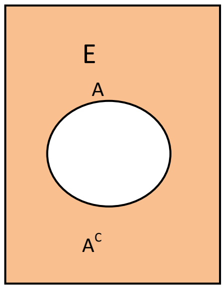
- $A\cup B=\{1,2,3,4,6\}$
- $A\cap B=\{2\}$
- $A^c=\{1,3,5\}$; $B^c=\{4,5,6\}$

- A-B={4,6}; B-A={1,3}









A partir de estas operaciones podemos distinguir entre los siguientes tipos de conjuntos o sucesos:

- ***Sucesos incompatibles***: son los que no pueden ocurrir nunca a la vez, y por tanto A∩B=∅. Ejemplo A=par={2,4,6}; B={1,3}
- ***Sucesos complementarios:*** son aquellos que cumplen dos premisas A∩B=∅ y A∪B=E. Ejemplo: A=par={2,4,6}, B=impar={1,3,5}. Se cumple que A y A^c son complementarios.
- ***Suceso incluido:*** un suceso A está incluido en B y se denota A⊆B si todo elemento de A está en B. Ejemplo: A={2,3}; B={2,3,5} A⊆B.

2.3. Propiedades del álgebra de Boole.

	Unión	**Intersección**
Conmutativa	A∪B=B∪A	A∩B=B∩A
Absorbente	A∪E=E	A∩∅=∅
Elemento neutro	A∪∅=A	A∩E=A
Distributiva	A∪(B∩C)=(A∪B)∩(A∪C)	A∩(B∪C)=(A∩B)∪(A∩C)
Leyes de Morgan	$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$	$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$

Otra propiedad: $(A^c)^c=A$

3. Espacio probabilístico

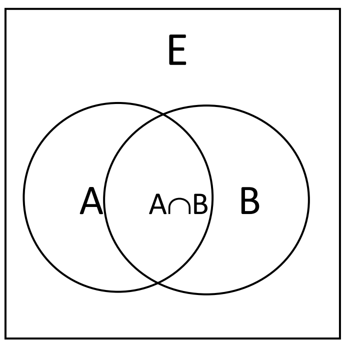
Antes de ver los distintos métodos de calcular la probabilidad de un suceso, vamos a definir la función probabilidad, que denotaremos como p, y sus propiedades:

$$p: \Omega \longrightarrow [0,1]$$
$$A \longrightarrow p(A)$$

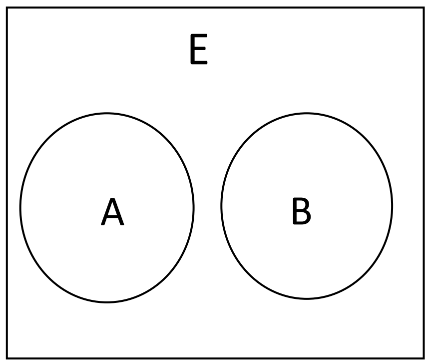
Propiedades que definen el espacio probabilístico (Ω, p) y que tiene que cumplir la función de probabilidad:

1. $0 \leq p(A) \leq 1$ ($p(\emptyset)=0$, suceso imposible y $p(E)=1$, suceso seguro).
2. $p(A \cup B)=p(A)+p(B)-p(A \cap B)$
3. Si A y B son incompatibles ($A \cap B=\emptyset$): $p(A \cup B)=p(A)+p(B)$

Explicación gráfica de las propiedades 2 y 3:



P.2



P.3

4. Cálculo de la probabilidad.

4.1. Probabilidad clásica. Regla de Laplace.

El origen de la probabilidad surgen con los juegos (cartas, dados, etc), y su mayor valedor fue el matemático francés Laplace.

Supongamos un experimento probabilístico formado por sucesos equiprobables, es decir todos ellos de igual probabilidad (no siempre es fácil demostrar ésto). La probabilidad de que ocurra un suceso A se calcula de la siguiente forma[1]:

$$\boxed{p(A)=\frac{elementos\ \ de\ \ A}{elementos\ totales\ de\ E}=\frac{casos\ \ favorables}{casos\ \ totales}}$$

[1] Para calcular los caos favorables y totales tendremos muchas veces que usar la combinatoria (tema3)

Veamos varios ejemplos sencillos:

Ejemplo1: Calcular la probabilidad de que al lanzar un dado el valor sea un número primo: E={1,2,3,4,5,6}, A="primo"={2,3,5} → $p(A)=\frac{3}{6}=0,5$.

Ejemplo 2: Sacar un basto en una baraja E={1o, 2o, …,1c,2c,…,1e,2e,…,1b,2b,…} y A="bastos"={1b,2b,3b,…} → $p(A)=\frac{10}{40}=0,25$

Ejemplo 3: lanzar dos monedas y que salga 1 cara: E={0caras,1cara,2caras} y A={1cara}. Pero los tres sucesos de E no son equiprobables, pues es más fácil que salga 1 cara (dos posibilidades, la 1ª cara y la 2ª cruz o al revés) que 0 ó 2 caras (sólo una posibilidad). De esta forma cambiamos el espacio maestral ara que los sucesos elementales misma probabilidad: E={cc,cx,xc,xx} y A={cx,xc}→ $p(A)=\frac{2}{4}=0,5$

Ejemplo 4: Lanzar dos dados y que la suma de ambos sea 6. E=valores suma= {2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}. A="suma 6"={6}. Pero hay que tener cuidado pues no es igual de probable que salga un 2 (1+1) que un 6 (1+5,2+4,3+3,4+2,5+1), así que habrá que cambiar de espacio muestral E={11,12,13,14,15,16,…,61,62,63,64,65,66} y A={15,24,33,42,51}. → $p(A)=\frac{5}{VR_6^2}=\frac{5}{6^2}\approx 0,14$

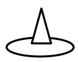
4.2. Probabilidad experimental. Ley de los grandes números

En los ejemplos anteriores suponíamos que los sucesos elementales eran equiprobables, pero y ¿si el dado o la moneda están trucados?, ¿Cómo podemos saberlo?. Por otro lado hay experimentos probabilísticos que no son equiprobables, dos ejemplos:

- *Ejemplo 1*: lanzamos una chincheta y queremos saber la probabilidad de que caiga con el pincho para arriba o para abajo
- *Ejemplo 2*: lanzamos un tiro libre en una canasta de baloncesto y queremos saber la probabilidad de encestar o de fallar.

Para calcular las probabilidades de los dos ejemplos anteriores y para saber si los dados o monedas están trucados se aplica la ley de los grandes números: se repite el experimento un gran número de veces apuntando los resultados, la probabilidad de que ocurra un suceso será igual a la frecuencia relativa cuando el número de veces realizadas el experimento es infinito (en la práctica un número de veces lo “suficientemente grande”). Esta ley presupone que el azar no existe cuando se repite un experimento las veces necesarias.

Completa estas tablas lanzando chinchetas y monedas. Escribe la probabilidad aproximada de que caiga la chincheta hacia arriba y hacia abajo y lo mismo con cara y cruz.

Chincheta				
Nº lanzamientos				
	f_i	h_i	f_i	h_i
10				
50				
200				
probabilidad				

Moneda				
Nº lanzamientos	Cara		Cruz	
	f_i	h_i	f_i	h_i
10				
50				
200				
Probabilidad				

Nota: todas las probabilidades calculadas por Laplace se podrían calcular usando la ley de los grandes números.

4.3. Probabilidad subjetiva o teórica.

No en todos los experimentos probabilísticos se pueden calcular la probabilidad siguiendo la ley de Laplace o la de los grandes números, pongamos algún ejemplo:

- *Ejemplo 1*: probabilidad de que en un partido de futbol gane uno u otro equipo o empaten.
- *Ejemplo 2:* unas elecciones a las que se presentan 3 partidos políticos, ¿cuál es la probabilidad de que gane cada uno de los 3 partidos?

Para calcular la probabilidad de estos dos ejemplos tendremos varios procedimientos, pero ninguno de ellos podemos asegurar que sea cierto, todos son subjetivos. Lo que tienen que tener en común todos ellos es que cumplan las leyes de probabilidad marcadas en el apartado 3.

Una forma sencilla de crear un espacio probabilístico es con el siguiente teorema:

Teorema: dada la función de probabilidad P:Ω→[0,1] sobre un espacio muestral E={s_1,s_2 ,…,s_N}queda perfectamente definida si se conoce los valores de p(s_1) tal que:

(a) p(s_1)≥0 $\forall$ i∈{1,2,…,N}

(b) $\sum_{i=1}^{N} p(s_i) = 1$

En los siguientes temas veremos la metodología para calcular la probabilidad en estos problemas a partir de las encuestas y las estadísticas de las mismas.

Todos los experimentos en los que no podemos calcular la probabilidad por ninguna de las dos leyes vistas en los apartados 4.1. y 4.2. son aquellos que no pueden repetirse las veces que deseemos con las mismas condiciones iniciales.

4.4. Propiedades de la probabilidad

Además de las propiedades que definen la probabilidad veamos alguna de las propiedades más importantes y usadas a la hora de calcular la probabilidad:

1. p(A∪B)=p(A)+p(B)-p(A∩B) (ya que sumando p(A)+p(B) sumamos dos veces la intersección.
2. p($\bar{A}$)=1-p(A) (la probabilidad del suceso contrario más la del propio suceso es 1)
3. p($\overline{A} \cup \overline{B}) = p(\overline{A \cap B}) = 1 - p(A \cap B)$ (Ley de Morgan)
4. p($\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B)$ (Ley de Morgan)

5. Probabilidad condicional. Sucesos independientes.

Muchos sucesos probabilísticos dependen de los resultados de algún otro suceso anteriormente acaecido. Por ejemplo la probabilidad de sacar la segunda carta sin reemplazamiento de una baraja de un determinado palo depende de si la carta anterior era de ese o de otro palo.

Así la probabilidad de que ocurra un suceso B, habiendo ocurrido otro suceso anteriormente A se denomina probabilidad condicionada. Se denota como p(B/A) (probabilidad de que ocurra B sabiendo que antes a ocurrido A).

El resultado de la probabilidad condicionada se puede relacionar con la probabilidad del los sucesos A y A∩B. La fórmula es la siguiente:

$$\boxed{p(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\ ó\ \ P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A)}$$

Veamos algunos ejemplos:

- *Ejemplo 1:* Probabilidad de sacar dos cartas de una baraja y que ambas sean figuras: A=”primera carta figura”, B=”segunda figura” A∩B=”las dos figuras”

  $$p(A)=\frac{cartas\ \ figuras}{cartas\ totales}=\frac{12}{40};\ \ p(B/A)=\frac{cartas\ \ figuras}{cartas\ totales}=\frac{11}{39},$$

  $$p(A\cap B)=\frac{dos\ cartas\ \ figuras}{dos\ cartas\ cualesquiera}=\frac{V_{12}^{2}}{V_{40}^{2}}=\frac{12\cdot 11}{40\cdot 39}\rightarrow p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B/A)$$

- *Ejemplo 2:* probabilidad de que en una bolsa con 3 bolas negras y 4 blancas saquemos las dos negras: A=”1ª negra”, B=”2ª negra”, A∩B=”ambas negras”

  $$p(A)=\frac{bolas\ negras}{bolas\ totales}=\frac{3}{7};\ \ p(B/A)=\frac{bolas\ negras}{bolas\ totales}=\frac{2}{6},$$

  $$p(A\cap B)=\frac{dos\ bolas\,negras}{dos\ bolas\ cualesquiera}=\frac{V_{3}^{2}}{V_{7}^{2}}=\frac{3\cdot 2}{7\cdot 6}\rightarrow p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B/A)$$

Sucesos independientes: dos sucesos A y B se dicen independientes cuando la probabilidad de A (B) no depende de que antes haya ocurrido B (A). Es decir ocurre:

p(A)=p(A/B) ó p(B)=p(B/A) ó p(A∩B)=p(A)·p(B).

Los ejemplos más típicos en extracciones sucesivas <u>con reemplazamiento.</u> Por ejemplo si cogemos dos cartas de una baraja con reemplazamiento, la probabilidad de sacar la segunda un as de una baraja es independiente de haber sacado antes otro as o la carta que sea: A=”1ª as”, B=”2ª as”, A∩B=”las dos as”: $p(A)=\frac{n^{o}\ ases}{n^{o}\ cartas}=\frac{4}{40}$,

$$p(B/A)=p(B)=\frac{n^{o}\ ases}{n^{o}\ cartas}=\frac{4}{40},\ p(A\cap B)=\frac{dos\,ases}{dos\,cartas}=\frac{4\cdot 4}{40\cdot 40}\rightarrow \text{p(A∩B)=p(A)·p(B)}$$

Resolución de problemas mediante las ***tablas de contingencia:*** son problemas en donde se estudian dos características de un mismo grupo de individuos. Se estructura de tal forma semejante a las tablas de doble entrada del tema 2. Veamos un ejemplo:

Problema: Se pregunta a los 650 miembros de un instituto, 50 profesores y 600 estudiantes si son favorables a la implantación de dos recreos de 15 minutos en vez de uno de 30. Se obtienen que en total 110 miembros son favorables, de los cuales 10 profesores. Elegido un miembro al azar se pregunta la probabilidad de que:

a) Sea contrario a la implantación de dos recreos
b) Sea alumno y favorable a dos recreos
c) Sabiendo que es profesor sea favorable a dos recreos
d) Sabiendo que es favorable a un recreo sea alumno.
e) ¿son los sucesos profesor y favorable a dos recreos sucesos independientes?

	A=Alumno	$\bar{A}$=profesor	Total
D=dos recreos	100	10	110
$\bar{D}$=un recreo	500	40	540
Total	600	50	650

a) p($\bar{D}$) $=\frac{540}{650}$
b) p(A∩D)=$\frac{100}{650}$
c) p(D/$\bar{A}$)=$\frac{10}{50}$
d) p(A/$\bar{D}$)=$\frac{500}{540}$
e) p($\bar{A}$)=$\frac{50}{650}$ y p($\bar{A}$/D)=$\frac{10}{110}$ como p($\bar{A}$)≠ p($\bar{A}$/D) los dos sucesos no son independientes.

6. Regla del producto.

La regla del producto permite calcular la probabilidad de una intersección de varios sucesos que ocurren sucesivamente por medio de las probabilidades condicionales.

Teorema del producto: si tenemos varios sucesos A_1, A_2, …, A_n la probabilidad de la intersección se calcula por la siguiente fórmula:

$$\boxed{p(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = p(A_1)\cdot p(A_2 / A_1)\cdot p(A_3 / A_1 \cap A_2)\cdot ...\cdot p(A_n / A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n)}$$

Ejemplo: si queremos calcular la probabilidad de que al sacar tres cartas sin reposición de una baraja española obtengamos un rey en la primera, una sota en la segunda y más de seis puntos en la tercera.

Denotemos A=”rey en la 1ª”, B=”sota en la 2ª”, C=”más de 6 puntos en la 3ª” de forma que buscamos:

$$p(A\cap B\cap C)=p(A)\cdot p(B/A)\cdot p(C/A\cap B)=\frac{4}{40}\cdot\frac{4}{39}\cdot\frac{4+3+4+3}{38}=\frac{4\cdot 4\cdot 14}{40\cdot 39\cdot 38}\approx 0{,}0038$$

7. Teorema de la probabilidad total.

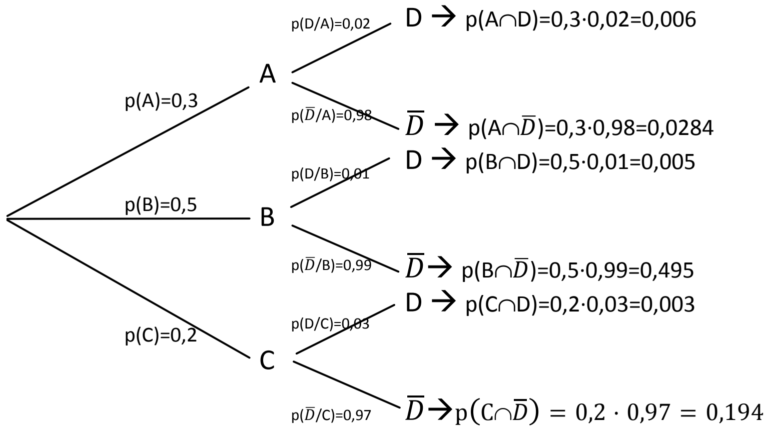
El teorema de la probabilidad total va a permitir calcular la probabilidad de un suceso a partir de las superposiciones de sucesos que son incompatibles dos a dos. La forma de calcular entender y resolver los problemas es a partir de diagrama de árbol, donde cada rama que sale de un mismo nivel son sucesos incompatibles.

***Teorema de la probabilidad total*:** si tenemos varios sucesos A_1, A_2,..., A_n que son incompatibles dos a dos y cuya unión es E, es decir $p(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)=1$ entonces la probabilidad de otro suceso B se puede calcular por medio de la siguiente fórmula:

$$\boxed{p(B)=p(A_1)\cdot p(B/A_1)+p(A_2)\cdot p(B/A_2)+\ldots+p(A_n)\cdot p(B/A_n)}$$

Ejemplo: en una fábrica de tornillos hay tres máquinas que ahora describimos: la máquina A que hace el 30% de los tornillos de los cuales el 2% son defectuosos, la máquina B que hace el 50% de los tronillos de los cuales el 1% son defectuosos y la máquina C que hace el 20% restante y el 3% de los tronillos son defectuosos. Calcular a) la probabilidad de que elegido un tornillo sabiendo que ha sido fabricado por A esté defectuoso, b) elegido uno al azar lo haya fabricado la máquina B y no esté defectuoso, c) la probabilidad de que elegido un tornillo al azar sea defectuoso (probabilidad total)

Hagamos el diagrama de árbol: D=defectuoso, $\overline{D}$=no defectuoso



a) p(D/A)=0,02

b) p(B∩$\overline{D}$)=p(B)·p($\overline{D}/B$) =0,5·0,99=0,495

c) Tenemos que los tres sucesos A, B, C son excluyentes y p(A∪B∪C)=1, luego podemos aplicar el teorema de la probabilidad total:

   p(D)= p(A)·p(D/A)+p(B)·p(D/B)+p(C)·p(D/C)=0,006+0,005+0,003=0,014

8. Teorema de Bayes.

En el problema anterior (las máquinas de tornillos) conocíamos las probabilidades condicionadas de que un tornillo esté defectuoso según haya sido fabricada en cada una de las tres máquinas, pero no al revés es decir las probabilidades condicionadas de que un tornillo esté fabricado en una u otro máquina sabiendo que es defectuoso o no (es decir p(A/D), p(A/$\overline{D}$), p(B/D), p(B/$\overline{D}$), p(C/D), p(C/$\overline{D}$)). Esta probabilidad se calcula por medio del teorema de Bayes.

Teorema de Bayes: si tenemos varios sucesos A_1, A_2,..., A_n que son incompatibles dos a dos y cuya unión es E, es decir p(A_1∪ A_2∪…∪ A_n)=1 entonces la probabilidad de que ocurra un suceso B condicionada a cada uno de los sucesos A_i, p(A_i/B), se puede calcular por la siguiente fórmula:

$$\boxed{p(A_i/B)=\frac{p(A_i\cap B)}{p(B)}=\frac{p(A_i)\cdot p(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n}p(A_1)\cdot p(B/A_i)}}$$

Ejemplo: en el problema anterior de las máquinas calcular las probabilidades siguientes: a) sabiendo que el tornillo es defectuoso que haya sido fabricado por la máquina B, b) sabiendo que el tornillo no es defectuoso el tronillo haya sido fabricado por la máquina C.

Buscamos las probabilidades condicionadas que no nos han dado en el problema, por esto debemos aplicar el teorema de Bayes:

a) $p(B/D)=\frac{p(B\cap D)}{p(D)}=\frac{p(B)\cdot p(D/B)}{p(A)\cdot p(D/A)+p(B)\cdot p(D/B)+p(C)\cdot p(D/C)}=\frac{0{,}005}{0{,}014}\approx 0{,}36$

b) $p(C/\overline{D})=\frac{p(C\cap \overline{D})}{p(\overline{D})}=\frac{p(C)\cdot p(\overline{D}/C)}{1-p(D)}=\frac{0{,}194}{1-0{,}014}\approx 0{,}20$

Ejercicios resueltos:

1. **PAU Andalucia 2006:** Sean los sucesos A y B independientes. La probabilidad de que ocurra B es 0,6. Sabemos también que P(A/B)=0,3.
   a. Calcule la probabilidad de que suceda, al menos, uno de los dos sucesos
   b. Calcular la probabilidad de que ocurra A pero no B

   Solución:

   p(B)=0,6 y p(A/B)=0,3, pero como son independientes se cumple que p(A/B)=p(A)=0,3. Se cumple entonces $p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B/A)=p(A)\cdot p(B)=0{,}18$

   a. Uno de los dos sucesos $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=0{,}6+0{,}3-0{,}18=0{,}72$
   b. Si A y B independientes también lo serán A y $\bar{B}$:
   $p(A\cap\bar{B})=p(A)\cdot p(\bar{B})=0{,}3\cdot(1-0{,}6)=0{,}12$

2. **PAU Andalucia 2006:** En un aula de dibujo hay 40 sillas, 30 con respaldo y 10 sin él. Entre las sillas sin respaldo hay 3 nuevas y entre las sillas con respaldo 7.
   a. Tomada una silla al azar ¿cuál es la probabilidad de sea nueva?
   b. Si se coge una silla que no es nueva ¿Cuál es la probabilidad de que sea sin respaldo?

   Solución:

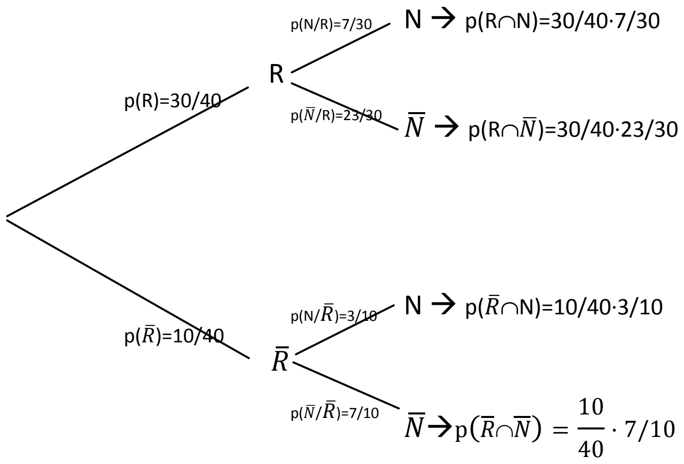
   Dos formas

   <u>Forma 1</u>: por tabla contingencia

	R=Respaldo	$\bar{R}$=no respaldo	Total
N=Nueva	7	3	10
$\bar{N}$=no nueva	23	7	30
Total	30	10	40

   a. p(N)=10/40=1/4=0,25
   b. $p(\bar{R}/\bar{N})=7/30$

Forma 2: por diagrama de árbol.



a. p(N)=$\frac{30}{40}\cdot\frac{7}{30}+\frac{10}{40}\cdot\frac{3}{10}=\frac{1}{4}$

b. Teorema de Bayes: $p(\overline{R}/\overline{N})=\frac{p(\overline{R})\cdot p(\overline{N}/\overline{R})}{p(\overline{N})}=\frac{\frac{10}{40}\cdot\frac{7}{10}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{7}{30}$

Nota: siempre que sea posible los ejercicios resultan más sencillos por tabla de contingencia (aunque si nos dan las probabilidades en vez de los elementos no suele ser posible).

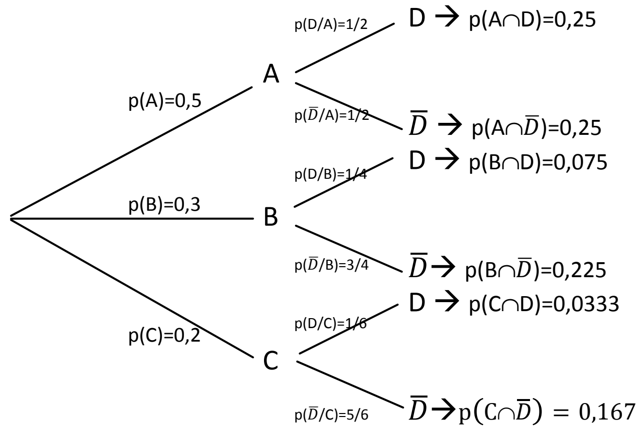
3. **PAU Cantabria 2006:** Una fábrica tiene tres cadenas de producción, A, B y C. La cadena A fabrica el 50% de coches; la B el 30% y la C el resto. Las probabilidades de que los coches resulten defectuosos en cada cadena son en la A ½, en la B ¼ y en la C 1/6. Calcular razonadamente:

   a. La probabilidad de que un coche sea defectuoso y haya sido fabricado en la cadena A

   b. La probabilidad de que el coche salga defectuoso.

   c. Si un coche no es defe3ctuosos la probabilidad de haya sido producido en C.

Solución:



a. p(A∩D)=0,25

b. p(D)=0,25+0,075+0,033=0,358

c. p(C/$\bar{D}$)=$\dfrac{p(C\cap\overline{D})}{p(\overline{D})}=\dfrac{0,167}{1-0,358}=0,26$

4. **PAU 2006 Castilla la Mancha**. En una ciudad hay tres lugares de ocio (A,B,C) a los que van habitualmente un grupo de amigos. Las probabilidades de ir un día cualquiera a cada uno de los locales son respectivamente 0.4, 0.3 y 0.6. Hallar la probabilidad de que un día cualquiera dicho grupo

a. Solamente vaya a uno de esos lugares

b. Vaya únicamente a dos de los tres.

Solución:

a. p(un solo local)=p((A∩$\bar{B}$∩$\bar{C}$)∪($\bar{A}$∩B∩$\bar{C}$)∪($\bar{A}$∩$\bar{B}$∩C))=p(A∩$\bar{B}$∩$\bar{C}$)+ p($\bar{A}$∩B∩$\bar{C}$)+p($\bar{A}$∩$\bar{B}$∩C)=p(A)·p($\bar{B}$)·$p(\bar{C})$+p($\bar{A}$)·p(B)·p($\bar{C}$)+p($\bar{A}$)·p($\bar{B}$)·p(C)= =0,4·0,7·0,4+0,6·0,3·0,4+0,6·0,7·0,6=0,436

b. p(dos locales)= p((A∩B∩$\bar{C}$)∪($\bar{A}$∩B∩C)∪(A∩$\bar{B}$∩C))= p(A∩B∩$\bar{C}$)+ p($\bar{A}$∩B∩C)+p(A∩$\bar{B}$∩C)=p(A)·p(B)·$p(\bar{C})$+p($\bar{A}$)·p(B)·p(C)+p(A)·p($\bar{B}$)·p(C)== 0,4·0,3·0,4+0,6·0,3·0,6+0,4·0,7·0,6=0,324

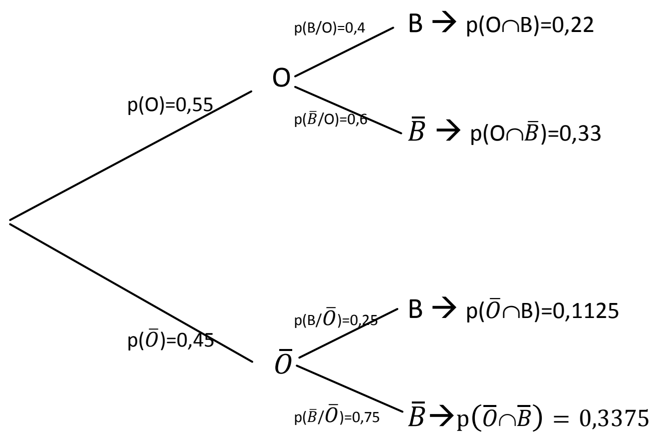
5. **PAU 2006 Castilla la Mancha:** En una clase de 2º de Bachillerato compuesta por el 55% de chicos, practica balonmano el 40% de los chicos y una de cada cuatro chicas. Si elegimos al azar un alumno de la clase:

a. ¿Cuál es la probabilidad de que haga balonmano?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que practique balonmano y sea chica?

c. Si resulta que no practica balonmano ¿cuál es la probabilidad de que sea chica?

Solución: O=chico, $\bar{O}$=chica, B=balonmano, $\bar{B}$=no balonmano



a. p(B)=0,22+0,1125=0,3325

b. p(A∩B)=0,1125

c. p(A/$\bar{B}$)=$\dfrac{p(A\cap\bar{B})}{p(\bar{B})}=\dfrac{0,3375}{1-0,3325}=0,5056$

6. **PAU 2006 Castilla y León.** Se lanzan dos dados A y B con las caras numeradas del 1 al 6. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los dos sea múltiplo de 4?

E={(1,1), (1,2),…,(1,6),…,(6,1), (6,2),…,(6,6)}

M_4={(1,3),(3,1),(2,2),(5,3),(3,5),(2,6),(6,2),(4,4),(6,6)}

$$p(M_4)=\frac{9}{6\cdot 6}=\frac{1}{4}=0,25$$

7. **PAU 2006 Castilla y León.** En un instituto se organiza una excursión que consiste en una semana en la nieve. De los alumnos de Bachillerato van a apuntarse 20 chicas y 25 chicos de un total de 43 chicas y 50 chicos. Si se elige un alumno al azar calcular las probabilidades de que:

   a. Sea chico y no vaya a la excursión

   b. Vaya a la excursión sabiendo que es chica

   c. Sea chica sabiendo que va a la excursión

   d. ¿son los sucesos "sea chica" e "ir de excursión" independientes?

   Solución

	O=Chico	$\bar{O}$=chica	Total
E=Excursión	25	20	45
$\bar{E}$=no excursión	25	23	48
Total	50	43	93

   a. $p(O\cap\bar{E})=\frac{25}{93}$

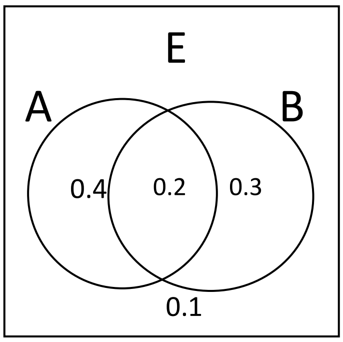
   b. $p(E/\bar{O})=\frac{20}{43}$

   c. $p(\bar{O}/E)=\frac{20}{45}$

   d. $p(\bar{O})=\frac{43}{93}$ y $p(\bar{O}/E)=\frac{20}{45}$ como $p(\bar{O})\neq p(\bar{O}/E)$ luego no son independientes.

8. **PAU 2006 C. Valenciana:** Sean A y B dos sucesos tales que $p(A\cup B)=0.9$, $p(\bar{A})=0.4$, $p(A\cap B)=0.2$. Calcular $p(B)$, $p(A/B)$, $p(A\cap\bar{B})$ y $P(\bar{A}\cup\bar{B})$

   Solución: se puede hacer el problema a partir de las propiedades de los conjuntos, aunque es más sencillo con un esquema de probabilidad: $p(A)=0.6$, $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B) \rightarrow p(B)=0.9-0.6+0.2=0.5$



$p(B)=0.5; p(A/B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}=\frac{0.2}{0.5}=0.4; p(A\cap\bar{B})=0.4 ; P(\bar{A}\cup\bar{B})=p(\overline{A\cap B})=1-0.2=0.8$

Problemas propuestos

1. PAU 2006 C. Valenciana: El volumen diario de producción en tres fábricas de una misma empresa es de 1000 unidades en la primera, 1500 en la segunda y 2500 en la tercera. Por ciertos desajustes, algunas unidades salen defectuosas. En concreto el 1% en las dos primeras fábricas y el 3% en la tercera.

a. ¿qué probabilidad de unidades correctas se fabrican?

b. Si se tiene una unidad defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada en la tercera fábrica?

2. PAU 2006 Extremadura: En un instituto hay 250 alumnos cursando bachillerato, 110 de segundo curso. El directo pregunta a todos si están de acuerdo en realizar una actividad cultural. Obteniéndose respuesta afirmativa del 30% de los alumnos del primer curso y del 60% de los del segundo. Si se selecciona un alumno al azar de los 250 calcular la probabilidad de :

a. Que sea alumno del segundo curso de lo que están de acuerdo en realizar la actividad cultural

b. Que sea un alumno de los que no están de acuerdo en realizar la actividad.

c. Sabiendo que el alumno es del primer curso este a favor de realizar la actividad.

3. PAU 2006 Islas Baleares: Una urna contiene 5 bolas blancas y 3 negras. Se extrae una bola al azar, se observa su color, se descarta y se ponen 2 bolas del otro color dentro de la urna. Luego se saca de la urna una segunda bola al azar. Calcular

a. La probabilidad de que la segunda bola extraída sea negra

b. La probabilidad de que ambas bolas extraídas sean de color diferente.

4. PAU 2006 La Rioja: En un experimento se sabe que $p(A)=0.6$, $p(B)=0.3$ y $p(A/B)=0.1$. Determinar $p(A\cup B)$.

5. PAU 2006 Madrid: Una persona cuida de su jardín pero es bastante distraída y se olvida de regarlo a veces. La probabilidad de que se olvide de regar es de 2/3. El jardín no está en buenas condiciones, así que si se riega tiene la misma probabilidad de progresar que de estropearse, pero si no se riega la probabilidad de progresar el 0.25. Si el jardín se ha estropeado, ¿cuál es la probabilidad de que la persona olvidara regarlo?

6. PAU 2006 Madrid: Se considera el experimento lanzar un dado y una moneda equilibrados. Se pide:

a. Describir el espacio muestral del experimento

b. Calcular la probabilidad del suceso "obtener una cara en la moneda y un número par en el dado"

7. PAU 2006 Murcia: De dos tiradores se sabe que uno de ellos hace dos dianas de cada tres disparos y el otro consigue tres dianas de cada cuatro. Si los dos disparan simultáneamente, calcular:

a. La probabilidad de que ambos acierten

b. La probabilidad de que uno acierte y el otro no

c. La probabilidad de que los dos fallen

d. La probabilidad de que alguno acierte.

8. PAU 2006 Murcia: Tenemos una urna A con 3 bolas rojas y 5 azules y otra urna B con 6 rojas y 4 azules. Si sacamos de una de ellas una bola al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea roja?

9. PAU 2006 Navarra: Un dado está trucado de forma que la probabilidad de obtener las distintas caras es proporcional al cuadrado del número que estas tienen.

a. ¿cuál es la probabilidad de obtener un cinco en un lanzamiento?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los dos dados sea 7?

10. PAU 2006 Oviedo: Un 30% de los trabajadores de una empresa trabajan a media jornada y tienen contrato temporal. En dicha empresa el 40% trabajan a media jornada. Además de los trabajadores con contrato temporal un 40% trabajan a media jornada.

a. ¿Qué probabilidad hay de que un trabajador tenga contrato temporal?

b. ¿Qué porcentaje de trabajadores tiene contrato temporal y no trabaje a media jornada

c. De los trabajadores que no trabajan a media jornada, ¿qué porcentaje tienen contrato temporal?

11. PAU 2006 País Vasco: En una caja hay 10 bombillas y dos están defectuosas. Con el fin de detectarlas vamos probando una tras otra. ¿Cuál es la probabilidad de que la tarea finalice exactamente en el tercer intento?

12. PAU 2006 País Vasco: Sean dos sucesos A y B independientes y tal que p(A)=2/3 y la probabilidad de que ocurre A pero no B es de 1/3. ¿cuál es la probabilidad de B?. ¿Y de que ocurra alguna de las dos?

13. PAU 2006 Zaragoza: Una empresa tiene dos fábricas, en la primera son mujeres el 60% y en la segunda un 55% son hombres. Se elige al azar un trabajador de cada fábrica para pertenecer al comité de empresa.

a. Calcule la probabilidad de los siguientes sucesos: A=ambos son hombres; B=Sólo uno es mujer; C=Ambos son mujeres

b. Razone si el suceso contrario del suceso C es el A, el B, el $A\cup B$, el $A\cap B$ o algún otro suceso y calcule su probabilidad.